

# 赤平投影网的解析原理

北京钢铁学院采矿教研室

廖国华

摘要

在岩体力学研究中,为对地质弱面进行统计加工和对岩体结构进行几何分析,常常需要用到赤平投影方法。本文从解析球面圆的赤平投影入手,系统地讨论了赤平极射投影和Lambert投影的关系;给出了吴尔夫网和施密特网的解析表达式;对这两种通用的投影网在等角性和等面性方面的特征进行了分析。在此基础上给出了一个简化的算式,以确定吴尔夫网中等价圆的半径,如果以吴氏网为基础以计算机制作等密曲线,这一算式将有实用价值。

天然岩体一个突出的特征是其中大量存在着类型不同、尺寸各异的各种地质软弱结构面如节理、断层、层面等等。结构面组合切割岩体、改变了岩体的特征,降低了岩体的强度。因此,进行岩体工程的力学研究时,需要从地质条件的研究开始,进行结构面的现场调查和实测以及统计加工,找出对工程有不利影响的结构面组合,进而在力学分析中考虑它们的作用,以使问题得到符合实际的解决。

对结构面组合产状进行分析、统计、解释是这一工作中重要的环节。进行这一工作所采用的通用方法是赤平投影网法。以产状为标志,还可输入表征结构面其它特征的数据供作力学分析之用。地质研究和力学分析正通过类似这样的途径彼此结合起来。

有两种赤平投影网是目前通用的,一种是吴尔夫(Wulff)网,亦称赤平极射投影网或等角赤平投影网;另一种是施密特(Schmidt)网,亦称等面赤平投影网。在作结构面组合定向图解分析时,两种网的用法没有原则的不同,然而两种网在基本性质方面还是存在重大差别的。

这两种投影方法都是古老的方法,近年来它们都在岩体力学工程中得到了广泛的应用。作为一种图解方法在近几年的文献中随处可见,文献[1]对其几何原理有详尽的说明,然而,介绍其解析原理的材料比较少见。本文从任意球面圆的赤平投影解析几何分析出发,对赤平投影的解析原理进行了系统的阐明,给出了有关的计算公式,分析了它们的基本特征。这种系统的讨论和分析,对深入理解和运用这一方法也许是有益的。

## 一、吴尔夫投影网的解析

### 1. 基本方程

在右旋直角坐标系中,以原点为中心,  $R$  为半径作球(见图1),球面方程为:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1)$$

过原点作任意直线  $l$  与球面交于  $N$  点, 记  $l$  与坐标轴  $x, y, z$  之间的夹角为  $\alpha, \beta, \gamma$ , 相应的余弦为  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ . 在  $ON$  上取点  $T$ , 记  $OT$  之长为  $l_0$ , 过  $T$  作平面  $Q$  与  $l$  垂直, 则  $Q$  面方程为:

$$\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z = l_0 \quad (2)$$

由于  $l_0 \leq R$ ,  $Q$  与球面相交, 交线  $V$  必然是一球面圆, 联立 (1)(2) 式求解, 得交线  $V$  的解析表达式:

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 \\ \alpha_0 X + \beta_0 Y + \gamma_0 Z = l_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\alpha_0 X + \beta_0 Y + \gamma_0 Z = l_0 \quad (3.2)$$

这理, 为避免混淆, 记  $v$  的坐标为  $X, Y, Z$ . 取点

$F$  为焦点,  $F$  点的坐标为  $(0, -R, 0)$ , 将交线  $V$  上的点与  $F$  联接, 联线上流点  $(x, y, z)$  与  $v$  及  $F$  点坐标的关系式为:

$$x = X \left( \frac{y + R}{Y + R} \right) \quad (4.1)$$

$$z = Z \left( \frac{y + R}{Y + R} \right) \quad (4.2)$$

将上式中的  $X, Z$  代入 (3-2) 和 (3-1) 联立求解得到:

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2 + 2yR + R^2) [l_0(y + R) - (\alpha_0 x + \beta_0 z)R]^2 + 2R(x^2 + y^2) \times \\ & \times [l_0(y + R) - (\alpha_0 x + \gamma_0 z)R] \{ \beta_0(y + R) + (\alpha_0 X + \gamma_0 z) \} + \\ & + R^2(x^2 + z^2 - y^2 - 2yR - R^2) \{ \beta_0(y + R) + (\alpha_0 x + \gamma_0 z) \} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

这就是流点的坐标方程式, 也就是以  $v$  为底,  $F$  和  $v$  上之点的联线为母线所形成的空间锥面的表达式, 也就是  $v$  线向  $F$  点投影所形成的投影锥面的表达式。

在方程 (5) 中, 令  $y = 0$ , 得到此投影锥与  $xz$  坐标面的交线  $W$  的解析式:

$$\left( x - \frac{R^2 \alpha_0}{l_0 + \beta_0 R} \right)^2 + \left( z - \frac{R^2 \gamma_0}{l_0 + \beta_0 R} \right)^2 = \left( \frac{R}{l_0 + \beta_0 R} \sqrt{R^2 - l_0^2} \right)^2 \quad (6)$$

式 (6) 表明, 交线  $W$  的轨迹为圆, 园心的坐标  $x_w, z_w$  及园半径  $r_w$  分别为:

$$\begin{cases} x_w = \frac{R^2 \alpha_0}{l_0 + \beta_0 R} \\ z_w = \frac{R^2 \gamma_0}{l_0 + \beta_0 R} \\ r_w = \frac{R}{l_0 + \beta_0 R} \sqrt{R^2 - l_0^2} \end{cases} \quad (7)$$

在赤平投影方法中, 称 (1) 球面为参考球,  $y = 0$  的水平平面为赤道平面, 在球中, 这个赤道平面由水平大园  $H$  代表。因此我们称  $W$  为球面线  $v$  的赤平极射投影, 而  $v$  是为  $Q$  确定的, 故也可称  $W$  为空间平面  $Q$  的赤平极射投影。

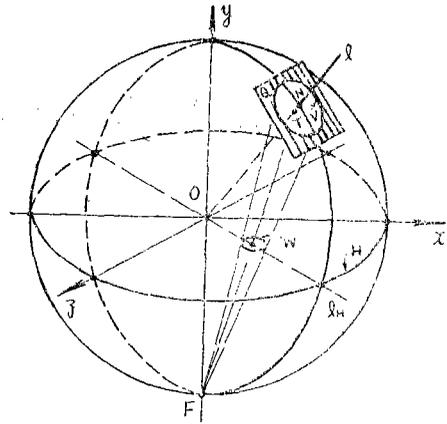


图 1

公式(6)是通贯本文的基本公式，它说明了赤平极射投影的基本原理：平面和球面相交构成一个园，球面上一个园，它的赤平极射投影也是一个园，不论大园小园都是如此(1)。

(6)式说明，空间平面的极射投影园由三个独立的参数确定，其中 $\alpha_0$ 、 $\beta_0$ 、 $\gamma_0$ 是由Q面的方向决定的参数，由于 $\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1$ ，所以它们中只有两个是独立的。 $l_0$ 是由Q面到原点的距离决定的，是一个定位参数。但是，目前用赤平投影方法分析结构面还只是研究它们的定向组合关系，因此，要统一规定 $l_0$ 值，以消去 $l_0$ 的影响。

### 空间平面的大园投影和极点投影

统一 $l_0$ 有两种选择办法，一种是大园法，一种是极点法。两种选择就得到表示一个空间平面的二种不同类型的赤平投影(见图2)。二法各有优点，用途不尽相同，它们不仅并存，且常对应着同时使用，互相补充，搞清了原理就没有混淆的弊病。

#### (1) 大园投影

一种统一 $l_0$ 的方法是使之为零，这时空间平面通过球心，与球面交成大园，这个大园由空间平面的方向参数唯一确定，因此，大园的赤平极射投影也就唯一地代表了空间平面。令(6)式中的 $l_0 = 0$ ，得到Q面的大园赤平极射投影方程：

$$\left(x - R \frac{\alpha_0}{\beta_0}\right)^2 + \left(z - R \frac{\gamma_0}{\beta_0}\right)^2 = \left(\frac{R}{\beta_0}\right)^2 \quad (8)$$

在地质学中，结构面的空间方向可用倾向方位角 $\theta$ 及倾角 $\phi$ 给定(见图2)。与此适应，我们令坐标系统的x轴水平并指向北，y轴直立指向上，z轴水平指向东，这时，我们有：

$$\begin{cases} \alpha_0 = \cos \alpha = \sin \phi \cos \theta \\ \beta_0 = \cos \beta = \cos \phi \\ \gamma_0 = \cos \gamma = \sin \phi \sin \theta \end{cases} \quad (9)$$

将(9)式代入(8)，即得到以 $\phi$ 、 $\theta$ 给定的地质结构面的大园赤平投影：

$$\left(x - R \operatorname{tg} \phi \cos \theta\right)^2 + \left(z - R \operatorname{tg} \phi \sin \theta\right)^2 = \left(\frac{R}{\cos \phi}\right)^2 \quad (10)$$

由(10)可见，大园投影园的半径为 $R/\cos \phi$ ，除倾角 $\phi = 0$ 以外，投影园总是要比赤平园半径大。 $\beta = \phi = 0$ 时得到赤平园方程 $x^2 + z^2 = R^2$ 。将此方程与(10)式联立，可求到大园投影园与赤平园的一对交点为 $x = \pm R \sin \theta$ 及 $z = \mp R \cos \theta$ 。过此两点的直线 $x + z \operatorname{tg} \theta = 0$ ，就是大园与赤平园的交线，亦即空间平面的走向线，此线通过园心，将大园投影园分为二段，优弧在赤平园外，劣弧在赤平园内。

#### (2) 极点投影

第二种选择方法是使 $l_0 = R$ ，空间平面与球面相切， $l$ 线与球面的交点N即为切点，点N被称为极点。以 $l_0 = R$ 代入(7)式，可知 $r_w = 0$ ，投影园退化为点，此点亦即为极点投影，它也完全代表了空间平面Q，其坐标 $x_n$ 、 $z_n$ 由公式(7)得为：

$$\begin{cases} x_n = R \frac{\alpha_0}{1 + \beta_0} \\ z_n = R \frac{\gamma_0}{1 + \beta_0} \end{cases} \quad (11)$$

对于倾向方位角为 $\theta$ ，倾角为 $\phi$ 的结构面：



由于  $l_0 \leq R$ , 因此  $\delta \geq \delta_0$ 。

### 3 吴尔夫投影网

绘制结构面的赤平极射投影迹线无需直接使用解析几何, 吴尔夫制作的一种投影网就是专供绘制结构面的投影用的。

一套吴氏网由两张网图组成, 一为经纬线网, 一为子午线网, 两张网图取相同半径的赤平圆表出, 互相配合使用。

#### (1) 经纬线网

经纬线网由经、纬两族曲线构成, 经线由走向相同, 倾角不同的大圆赤平投影迹线构成 (见图3), 经线族方程为:

$$x^2 + (z \pm R \operatorname{tg} \phi)^2 = \left( \frac{R}{\cos \phi} \right)^2 \quad (16)$$

纬线是一系列与经线大圆的走向垂直的直立平面与球面交成的直立小圆的赤平投影迹线, 制图时取这些直立平面的参数为  $l_0 = R \cos \lambda$ ,  $\gamma_0 = 1$ , (见图3), 由方程(6)得纬线族方程为:

$$\left( x - \frac{R}{\cos \lambda} \right)^2 + z^2 = (R \operatorname{tg} \lambda)^2 \quad (17)$$

#### (2) 子午线—纬度圈网

子午线—纬度圈网由另外两组平面的赤平极射投影构成。一组平面直立, 通过参考圆心, 但其走向方位角不同, 这一组平面的赤平投影线称为子午线族。将方程(8)展开, 令  $\beta_0 = 0$  即得子午线族方程:

$$x - z \operatorname{tg}(\theta - 90^\circ) = 0 \quad (18)$$

其中  $(\theta - 90^\circ)$  为平面的走向方位角。

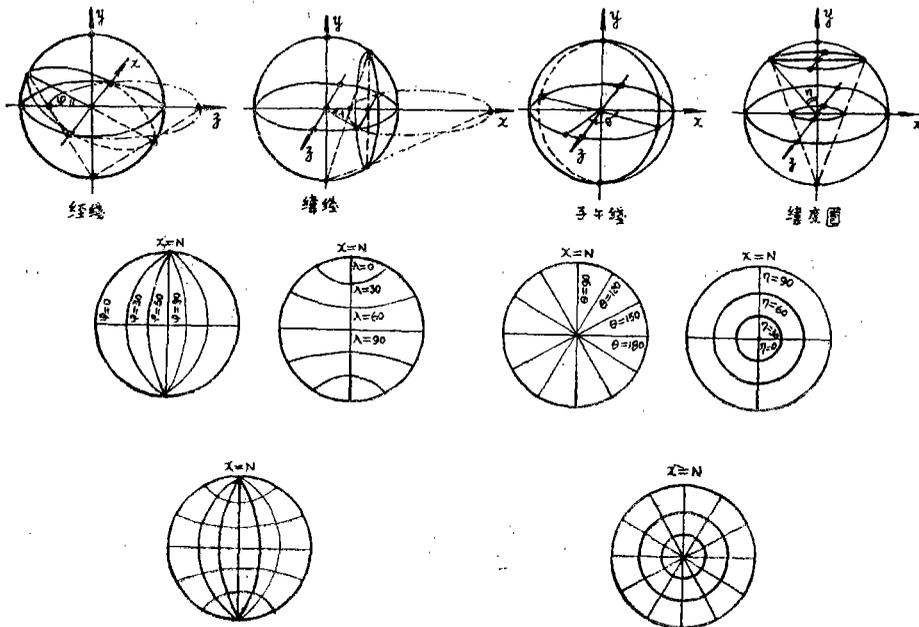


图 3

纬度圈则为一系列水平小圆的赤平极射投影迹线,在方程(6)中,令 $l_0 = R \cos \eta, \beta_0 = 1$ ,  
 即得纬度圈投影方程

$$x^2 + z^2 = \left(R \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}\right)^2 \quad (19)$$

经线、纬线、子午线和纬度圈之间的几何关系,详见图 3

## 二、施密特投影网的解析

### 1. 基本方程

兰勃特 (Lambert) 提出的一种投影方法被称为等面积赤平投影, 它也是一种赤平投影, 下面将看到这种投影与极射投影不同, 但又有一定的联系。

在参考球面上任取一点  $p$ , 过  $p$  点作直立大圆  $S$  如图 4。按极射投影原则,  $p$  点的赤平投影为  $p_w$ , 但兰氏投影法要求以  $p_s$  点作为  $p$  点的赤平投影, 规定  $p_s$  点至原点的距离  $OP_s$  等于  $O'p$ , 点  $O'$  的坐标为  $(0, R, 0)$

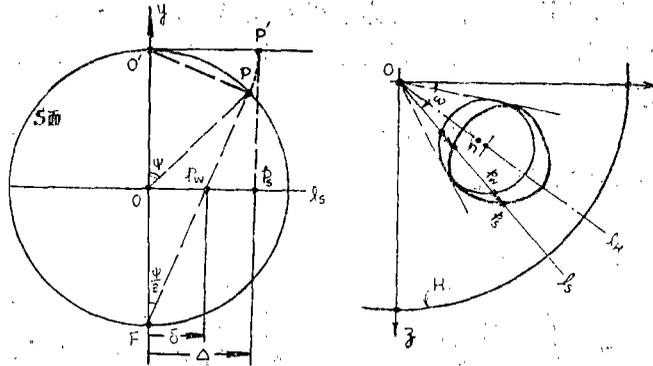


图 4

令  $OP_s = \Delta, OP_w = \delta$ , 由图 4 可见,  $\Delta$  与  $\delta$  之间存在着一定的联系。设  $\angle O'OP = \psi$ , 则  $\angle O'FP = \frac{\psi}{2}$ , 于是:

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{\delta}{R}$$

$$2R \sin \frac{\psi}{2} = \Delta$$

消去  $\frac{\psi}{2}$  得到

$$\Delta = \frac{2R\delta}{\sqrt{R^2 + \delta^2}} \quad (20)$$

$$\delta = \sqrt{\frac{R^2\Delta^2}{4R^2 - \Delta^2}}$$

兰氏投影不要求对极角作任何改变,因此在极坐标系中,兰氏投影可以看作是对等角投影所作的一种极距变换。这一变换由(20)式规定,是一种非线性变换。

由此可见,任意空间平面Q或Q面与参考球面的交线v的兰氏投影迹线( $\Delta, \omega$ )可以通过v的赤平极射投影迹线W( $\delta, \omega$ )经变换(20)的作用而得到。这里, $\Delta, \delta$ 表极距, $\omega$ 表示极角。

考虑到 $x = \delta \cos \omega, z = \delta \sin \omega$ ,则由方程(6)得Q面或v线的赤平极射投影方程的极坐标形式为:

$$\delta^2 - \frac{2R^2}{l_0 + \beta_0 R} (\alpha_0 \cos \omega + \gamma_0 \sin \omega) \delta + \frac{R^4 (\frac{l_0^2}{R^2} - \beta_0^2)}{(l_0 + \beta_0 R)^2} = 0$$

将 $\delta = \sqrt{R^2\Delta^2/4R^2 - \Delta^2}$ 代入上式,得到:

$$(\beta_0^2 + \alpha_0 \cos \omega + \gamma_0 \sin \omega)^2 \Delta^4 + 4R^2 \left[ \beta_0 \left( \frac{l_0}{R} - \beta_0 \right) - (\alpha_0 \cos \omega + \gamma_0 \sin \omega)^2 \right] \Delta^2 + 4R^4 \left( \frac{l_0}{R} - \beta_0 \right)^2 = 0 \quad (21)$$

这就是Q面或v线兰氏赤平投影迹线的极坐标方程。通过

$$\left. \begin{aligned} X^2 + Z^2 &= \Delta^2 \\ \frac{X}{\sqrt{X^2 + Z^2}} &= \cos \omega \\ \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Z^2}} &= \sin \omega \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

坐标变换,就得到Q面或v线兰氏赤平投影迹线的直角坐标表达式:

$$\beta_0^2 (X^2 + Z^2)^2 + (\alpha_0 X + \gamma_0 Z)^2 (X^2 + Z^2 - 4R^2) + 4R^2 \beta_0 \left( \frac{l_0}{R} - \beta_0 \right) (X^2 + Z^2) + 4R^4 \left( \frac{l_0}{R} - \beta_0 \right)^2 = 0 \quad (23)$$

为着区别,我们已将兰氏投影的直角坐标写为X、Z。由(21)及(23)式可见,任意空间平面Q与参考球交线v的兰氏赤平投影与其赤平极射投影不同,它不是一个圆,而是一个表达式比较复杂的四次曲线。下面将要看到,这是一个封闭的四次曲线。

## 2. 大圆投影和极点投影

### (1) 大圆投影

在方程(23)中令 $l_0 = 0$ ,得到大圆兰氏投影方程:

$$\beta_0^2 (X^2 + Z^2)^2 + (\alpha_0 X + \gamma_0 Z)^2 (X^2 + Z^2 - 4R^2) - 4R^2 \beta_0^2 (X^2 + Z^2) + 4R^4 \beta_0^2 = 0 \quad (24)$$

其以结构面产状 $\alpha, \beta$ 表示的形态为:

$$(X^2 + Z^2)^2 + (\operatorname{tg}\varphi \cos\theta X + \operatorname{tg}\psi \sin\theta Z)^2 (X^2 + Z^2 - 4R^2) - 4R^2(X^2 + Z^2) + 4R^4 = 0 \quad (25)$$

参数  $\beta_0 = 1$ ,  $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$  代表赤道平面, 以之代入(24)式, 得到赤平园投影方程:

$$X^2 + Z^2 = 2R^2 = R_s^2, \quad (26)$$

式中已令  $\sqrt{2}R = R_s$ , 其中  $R_s$  为兰氏赤平园的半径。由此可见, 采用兰氏投影法则时, 赤平园将超出参考球水平大圆的范围, 其半径  $R_s$  为参考球水平大圆半径  $R$  的  $\sqrt{2}$  倍。

在兰氏赤平园中来看兰氏大圆投影方程(24), 其表达式为:

$$\beta_0^2 (X^2 + Z^2)^2 + (\alpha_0 X + \gamma_0 Z)^2 (X^2 + Z^2 - 2R_s^2) - 2R_s^2 \beta_0^2 (X^2 + Z^2) + R_s^4 \beta_0^2 = 0 \quad (27)$$

仍然是四次曲线。

## (2) 极点投影

对(13)式作(20)式的变换, 得兰氏极点投影的极坐标表达式

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n &= 2R \sin \frac{\psi}{2} \\ \omega_n &= \theta \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

放在兰氏赤平园中观查, 则极点投影的极坐标为:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_n &= \sqrt{2} R_s \sin \frac{\varphi}{2} \\ \omega_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

直角坐标表达式为:

$$\left. \begin{aligned} X_n &= \sqrt{2} R_s \sin \frac{\varphi}{2} \cos\theta \\ Z_n &= \sqrt{2} R_s \sin \frac{\varphi}{2} \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

以上三公式中, 都用空间平面的倾向方位角  $\theta$  及倾角  $\varphi$  作为参数。

## 3. 施密特投影网

施密特根据兰氏投影法则, 制作了相应的经纬线网和子午线—纬度圈网, 从而使具有等面性这一特征, 但形态比较复杂的兰氏投影法在岩体力学中得到了广泛的应用。

### (1) 经纬线网

以  $\alpha_0 = 0$  代入(24)式, 并注意到此时  $\frac{\gamma_0^2}{\beta_0^2} = \frac{1 - \beta_0^2}{\beta_0^2} = \operatorname{tg}^2\beta = \operatorname{tg}^2\varphi$ , 得到经线方程组:

$$\left. \begin{aligned} (X^2 + Z^2 - 2R^2)^2 + Z^2 (X^2 + Z^2 - 4R^2) \operatorname{tg}^2\varphi &= 0 \\ \text{或} \quad (X^2 + Z^2 - R_s^2)^2 + Z^2 (X^2 + Z^2 - 2R_s^2) \operatorname{tg}^2\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

在(27)中令  $Z = 0$ , 得到经线族的  $X$  轴截距为

$$X = \pm R_s$$

经线方程的  $Z$  轴截距, 出现在  $X = 0$  线上, 由(27)式知此截距为:

$$Z = \pm R_s \sqrt{1 \pm \sin\varphi} \quad (28)$$

经线方程组的极坐标表达式为:

$$(\Delta^2 - R_s^2)^2 + \Delta^2 (\Delta^2 - 2R_s^2) \sin^2\omega \operatorname{tg}^2\varphi = 0 \quad (29)$$

或写为

$$\Delta = \pm R_s \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \sin^2 \omega \operatorname{tg}^2 \varphi}}} \quad (30)$$

用(30)式,即可作出施氏经线网。

纬线网可在(23)式中令 $\alpha_0 = 1$ ,  $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ 及 $l_0 = R \cos \lambda$ 而得到:

$$X^2(X^2 + Z^2 - 2R_s^2) + R_s^4 \cos^2 \lambda = 0 \quad (31)$$

其X轴截距为:

$$X = \pm R_s \sqrt{1 \pm \sin \lambda} \quad (32)$$

纬线族的极坐标方程为:

$$\Delta^4 \cos^2 \omega - 2R_s^2 \Delta^2 \cos^2 \omega + R_s^4 \cos^2 \lambda = 0 \quad (33)$$

或写为:

$$\Delta = \pm R_s \sqrt{1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\cos \lambda}{\cos \omega}\right)^2}} \quad (34)$$

据(34)式,即可作出施氏纬线网。

## 2. 子午线纬度圈网

在方程(25)中令 $\varphi = 90^\circ$ ,得子午线族方程

$$X - Z \operatorname{tg}(\theta - 90^\circ) = 0 \quad (35)$$

其中 $(\theta - 90^\circ)$ 表直立大圆的走向方位角。

在方程(24)中,令 $l_0 = R \cos \eta$ ,  $\beta_0 = 1$ ,  $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$ 得到纬度圈方程:

$$X^2 + Z^2 = 2R_s^2 \sin \frac{2\eta}{2} \quad (36)$$

可见纬度圈网的迹线为圆。这是施氏网中迹线不是四次曲线的唯一特殊情况。

## 三、两种赤平投影网的基本特征

吴尔夫网和施密特网之间有互相联系的一面,这种联系由坐标变换(20)来体现,通过(20)式两种投影图形可以互相转化。但是,这种变换是一种非线性变换,因此,两种投影网又各具有不同的特征。最基本的差别在于吴尔夫网是一种等角不等面的投影网,而施密特网则是一种等面不等角的投影网,关于“等角”和“等面”,其含义将在下面定义。下面除讨论两种投影网的异同外,还将谈到密度统计和等值线作图问题,结合吴氏网提出一个简单的计算式以确定记数圆的半径,从而改善利用吴氏网进行结构面统计计算的精度。

### 1. 两种投影网的相互转化

构成吴氏网的各种大、小圆的赤平投影迹线方程都是圆弧,因此吴氏网容易制作。制作施密特网可以根据上一节所给的公式,也可以以吴氏网为基础,按公式(20),变化极距,用图解的方法得到。

将吴氏网转换为施密特网,有两点几何关系需加注意。第一,当吴氏网的半径取为R时,相应施密特网的赤平圆半径需取为 $R_s$ ,且 $R_s = \sqrt{2}R$ 。第二,从吴氏网过渡到施密特网,在赤平圆之内,迹线的极距尽管都是放大,但就整个赤平来讲,从吴氏投影圆过渡到施密特四次曲线,极距是有放有缩,研究变换

$$\Delta = \frac{2R\delta}{\sqrt{R^2 + \delta^2}}$$

可知，如果  $\delta = \sqrt{3}R$ ，由上式有  $\Delta = \delta$ ；但若  $\delta < \sqrt{3}R$ ，则  $\Delta > \delta$ ；而在  $\delta > \sqrt{3}R$  时，如果  $\delta \rightarrow \infty$ ，则  $\Delta \rightarrow 2R$ 。这说明在赤道平面上存在一个半径  $R_0 = \sqrt{3}R$  的“中性圈”，在此圈上，两种投影永远相等；中性圈内， $\delta$  被放大了；中性圈外， $\delta$  被缩小，但  $\Delta$  不会象  $\delta$  那样趋向于无穷大， $\Delta$  的最大值等于  $2R$  (见图5)。

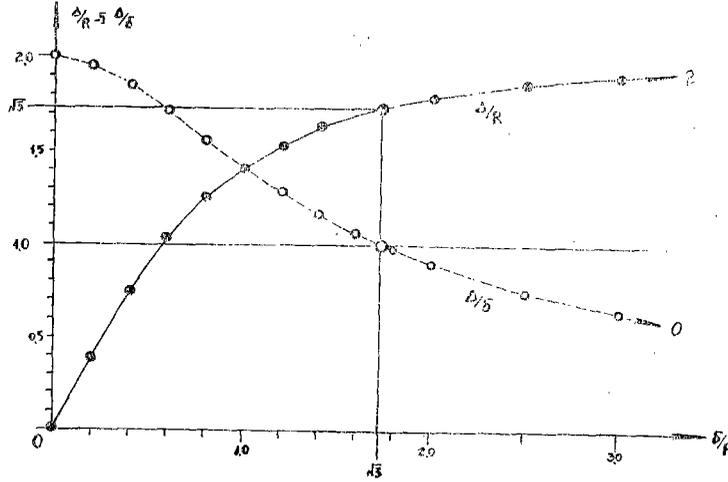


图 5

图6以统一的坐标绘出了两种投影网  $45^\circ$  经线和  $45^\circ$  纬线。上述变换关系和几何关系即一目了然。

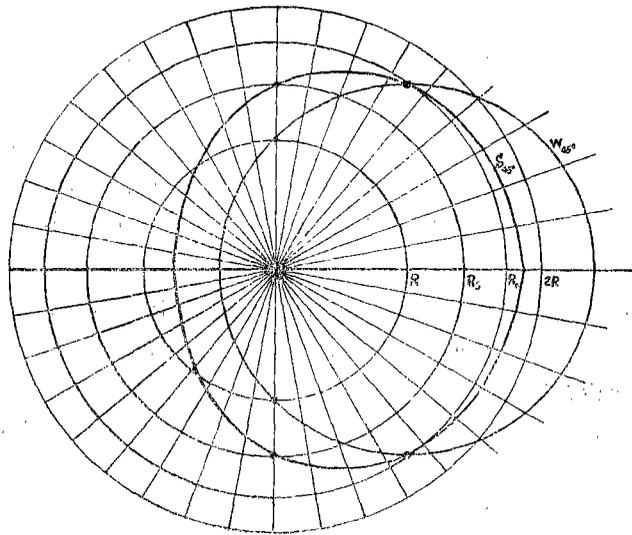


图 6 (1)

## 2. 投影的等角性问题

设有任意二空间平面，其法线夹角为  $\phi_n$ ，置于参考球中后，其大圆在  $G$  点相交，交角为

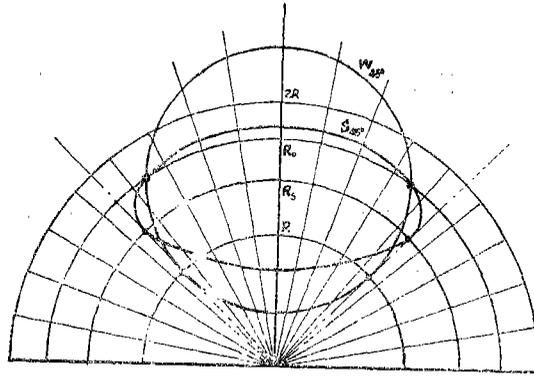


图 6 (2)

$\phi_G$ , 二大圆的赤平投影迹线相交于p点, 其夹角为 $\phi_p$ ; 如果 $\phi_p = \phi_n (= \phi_G)$ , 则此投影为一种等角投影(参看图7)

(1) 吴尔夫网——等角投影网

设有空间平面1,2, 其参数分别以脚标1,2表示, 二面之夹角 $\phi_n$ 由下式给出:

$$\cos \phi_n = \alpha_{01} \alpha_{02} + \beta_{01} \beta_{02} + \gamma_{01} \gamma_{02}$$

用正切表示, 则为:

$$\operatorname{tg} \phi_n = \sqrt{\frac{1 - (\alpha_{01} \alpha_{02} + \beta_{01} \beta_{02} + \gamma_{01} \gamma_{02})^2}{\alpha_{01} \alpha_{02} + \beta_{01} \beta_{02} + \gamma_{01} \gamma_{02}}} \quad (37)$$

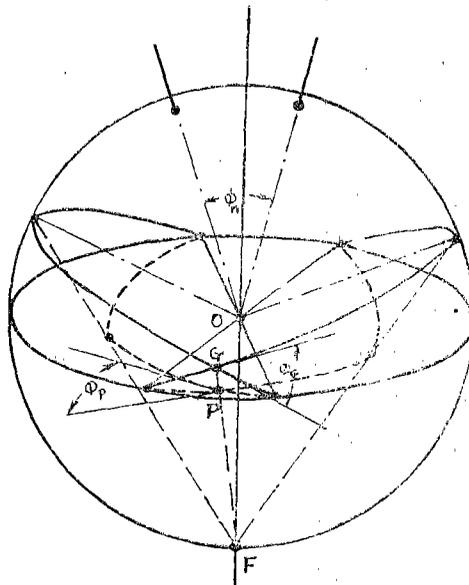


图7

分别将二大圆的方向余弦参数代入(8), 得到它们的投影方程, 然后联立求解, 得到二投影迹线的交点坐标为:

$$\left. \begin{aligned} x_p &= cz_p \\ z_p &= \frac{R}{c^2+1} \left[ \left( \frac{\alpha_{01}}{\beta_{01}} c + \frac{\gamma_{01}}{\beta_{01}} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\alpha_{01}}{\beta_{01}} c + \frac{\gamma_{01}}{\beta_{01}} \right)^2 + (c^2+1)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

其中 
$$C = \frac{\gamma_{01}\beta_{02} - \gamma_{02}\beta_{01}}{\beta_{01}\alpha_{02} - \beta_{02}\alpha_{01}}$$

微分(8)式, 得到二投影迹线上任意点的切线斜率, 再以交点坐标代入, 得到二投影迹线在其交点上的切线斜率, 它们分别为:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \xi_{1p} &= \frac{R \frac{\gamma_{01}}{\beta_{01}} - z_p}{x_p - R \frac{\alpha_{01}}{\beta_{01}}} \\ \operatorname{tg} \xi_{2p} &= \frac{R \frac{\gamma_{02}}{\beta_{01}} - z_p}{x_p - R \frac{\alpha_{02}}{\beta_{02}}} \end{aligned} \quad (39)$$

因此

$$\operatorname{tg} \phi_p = \operatorname{tg}(\xi_{1p} - \xi_{2p}) = \frac{\sqrt{1 - (\alpha_{01}\alpha_{02} + \beta_{01}\beta_{02} + \gamma_{01}\gamma_{02})^2}}{\alpha_{01}\alpha_{02} + \beta_{01}\beta_{02} + \gamma_{01}\gamma_{02}} \quad (40)$$

将(40)与(37)比较, 可见

$$\phi_p = \phi_n$$

由图7还可看出, 由于OG是两面的交线, 而过G点与两大圆相切的切线必然与OG垂直,  $\phi_c$ 等于 $\phi_n$ 则是显然的。

等角性也称为共形性, 球面线的夹角, 经过等角投影变换后, 其投影的夹角也将保持不变, 因此球面图形与其投影图形共形。吴氏网由于具有这种等角性所以在许多领域得到了广泛的应用。

## (2) 施密特网——非等角投影网

吴氏网的等角性, 当其经变换(20)变为施密特网时, 由于变换的非直线性, 故而遭到破坏。前已证明, 球面圆的兰氏投影是一条四次曲线, 即可说明施密特网是不等角的。

## 3. 投影的等面性问题

设在参考球上有面积给定的球缺面, 如果不论此球缺面在球面上处于那个部位, 其赤平投影图形的面积皆不变, 则称此种投影为等面投影。

### (1) 吴尔夫网——不等面投影网

记球缺表面积为 $S_v$ , 周知

$$S_v = 2\pi R(R - l_0) \quad (41)$$

其赤平投影圆半径已由(7)式给出, 故投影圆面积为:

$$S_w = \pi \left( \frac{R}{l_0 + \beta_0 R} \right)^2 (R^2 - l_0^2) \quad (42)$$

于是: 
$$\frac{S_w}{S_v} = \frac{1 + \frac{l_0}{R}}{2 \left( \frac{l_0}{R} + \beta_0 \right)^2} \quad (43)$$

我们权称  $S_v$  为物,  $S_w$  为象。由(43)可见, 象物面积之比不是固定不变, 而是随  $l_0$  及  $\beta_0$  而改变的, 所以吴氏网是一种不等面的投影网。对吴氏网而言, 物大则象的收缩率大; 如果物不变其大小, 则象物比取决于  $\beta_0$ , 物愈接近  $y$  轴象的收缩率就增大, 反之反是。

分析一个具体实例, 取  $S_v$  为半球表面积的  $k$  倍, 即  $S_v = k 2\pi R^2$ , 此时:

$$l_0 = R(1 - k) = CR \quad (44)$$

我们取  $k$  为  $1/100$ , 即一个表面积为半球表面积  $1/100$  的小球缺对应的球面圆投影来作分析, 此时,  $c = 0.99$ ,  $l_0 = 0.99R$ 。

从(43)式还可知道一重要事实, 即象物比不取决于  $\gamma_0$  或  $\alpha_0$ , 也就是说, 象物比是绕  $y$  轴旋转对称的。我们取  $\gamma_0 = 0$  来作分析即可代表一般, 此时, 由(43)我们有

$$\frac{S_w}{S_v} = \frac{0.995}{(0.99 + \beta_0)^2}$$

由于  $k = 0.01 \ll 1$ , 我们可用  $\delta_0$  代  $\delta_w$  以简化算式且不至发生太大的误差, 此时, 由(15)式可得:

$$\beta_0 = \frac{1 - \left(\frac{\delta}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{\delta}{R}\right)^2} \quad (45)$$

以此式代入上式得:

$$\frac{S_w}{S_v} = \frac{0.695}{\left(0.99 + \frac{1 - \left(\frac{\delta}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{\delta}{R}\right)^2}\right)^2} \quad (46)$$

图 8 给出了  $S_w/S_v$  随  $\delta/R$  而变化的图形。图形说明, 尽管对应的球缺面积皆为半球面积的百分之一, 但是由于其极点相对位置不同, 比值  $S_w/S_v$  也不同,  $\delta/R = 0$  时, 投影圆面积只为球缺面积的 25%, 到  $\delta/R$  接近 1 时, 才逐渐接近球缺面积。

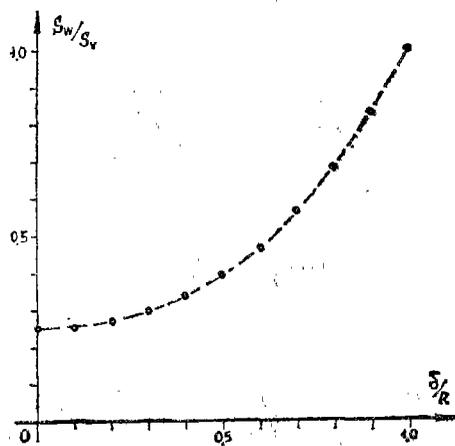


图 8

(2) 施密特网——等面投影网

由于球面圆锥投影对原点旋转对称，我们仍将在 $\gamma_0 = 0$ 的条件下讨论问题。这时，由(21)式，球面圆锥(Lambert)投影迹线的坐标表达式为：

$$\left(\frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} + \cos^2 \omega\right) \Delta^4 + \left(\frac{c\beta_0}{\alpha_0^2} - \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} - \cos^2 \omega\right) \Delta^2 + 4R^4 \left(-\frac{c}{\alpha_0} - \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^2 = 0 \quad (47)$$

式中， $c = l_0/R$ 。

解(47)式，首先得到

$$\Delta_{1,2}^2 = \frac{2R^2}{\frac{\beta_0^2}{(1-\beta_0^2)} + \cos^2 \omega} \left[ \left( \frac{\beta_0^2 - c\beta_0}{1-\beta_0^2} + \cos^2 \omega \right) \pm \sqrt{\cos^4 \omega + \cos^2 \omega \left( \frac{\beta_0^2 - c^2}{1-\beta_0^2} \right)} \right] \quad (48)$$

从而

$$\Delta_{1,3} = R_s \left\{ \frac{1}{\frac{\beta_0^2}{1-\beta_0^2} + \cos^2 \omega} \left[ \left( \frac{\beta_0^2 - c\beta_0}{1-\beta_0^2} + \cos^2 \omega \right) \pm \sqrt{\cos^4 \omega + \cos^2 \omega \left( \frac{1-\beta_0^2}{\beta_0^2 - c^2} \right)} \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (49)$$

得 $\Delta$ 实数解需满足的条件是：

$$\cos^4 \omega + \cos^2 \omega \left( \frac{\beta_0^2 - c^2}{1-\beta_0^2} \right) \geq 0$$

亦即

$$\omega \leq \arccos \pm \sqrt{\frac{c^2 - \beta_0^2}{1-\beta_0^2}} \quad (50)$$

由(49)式可见 $\Delta$ 分为 $\Delta_1$ 及 $\Delta_2$ 两支，两支图象都关于 $\omega = 0$ 的轴对称，因此，投影迹线所围成的面积 $S_s$ 可由

$$S_s = 2 \left[ \frac{1}{2} \int_0^\omega \Delta_1^2 d\omega - \frac{1}{2} \int_0^\omega \Delta_2^2 d\omega \right] \quad (51)$$

求得，其中，

$$\omega = \arccos \sqrt{\frac{c^2 - \beta_0^2}{1-\beta_0^2}} \quad (52)$$

将(49)式代入，得到：

$$S_s = \int_0^\omega \frac{4R^2}{\frac{\beta_0^2}{1-\beta_0^2} + \cos^2 \omega} \sqrt{\cos^4 \omega + \cos^2 \omega \left( \frac{\beta_0^2 - c^2}{1-\beta_0^2} \right)} d\omega \quad (53)$$

以 $S_v = (1-c)2\pi R^2$  除 $S_s$ ，得到

$$\frac{S_s}{S_v} = \frac{2}{\pi(1-c)} \int_0^{\omega} \frac{\sqrt{\cos^4 \omega + \cos^2 \omega \left( \frac{\beta_0^2 - c^2}{1 - \beta_0^2} \right)}}{\left( \frac{\beta_0^2}{1 - \beta_0^2} \right) + \cos^2 \omega} b \omega \quad (54)$$

(53)及(54)式在 $\beta = 0$ 即 $\beta_0 = 1$ 时,不能使用,但是,此时(47)式简化为:

$$\Delta^4 + 4R^2(c-1)\Delta^2 + 4R^4(c-1)^2 = 0$$

于是

$$\frac{S_s}{S_v} = \frac{\pi \Delta^2}{(1-c)2\pi R^2} = \frac{\pi 2R^2(1-c)}{(1-c)2\pi R^2} = 1$$

这是唯一可求解的一种情况。

但是,  $\beta_0 \neq 1$ 时, 尽管 $S_s$ 和 $S_s/S_v$ 的算式已经给出, 但(53)及(54)式都不能用解析的方法直接积分。

我们可以用数值积分或图解积分来计算 $S_s/S_v$ 值。图9是一个例子, 图中按(49)式给出了球面 园兰氏投影的迹线, 作图时 $c = 0.99$ , 即球面圆对应球缺的面积为 $0.01 \times 2\pi R^2$ ;  $R_s = 20\text{cm}$ 。图中只给出了三种情况, 即 $\beta = 0$ ,  $\beta = 45^\circ$ 和 $\beta = 90^\circ$ 。图中还附带给出了相应的吴氏网中的图形可供比较。对兰氏投影迹线所围成的面积而言,  $\beta = 0$ 时, 已证明 $S_s/S_v = 1$ 。对于 $\beta = 45^\circ$ 及 $\beta = 90^\circ$ , 粗略的图解积分指出 $S_s/S_v$ 皆较接近于一(二种情况下 $S_s/S_v$ 皆为0.98左右)。

据此我们可得结论说, 施密特投影网是一等面投影网, 至少从工程角度来说是这样。

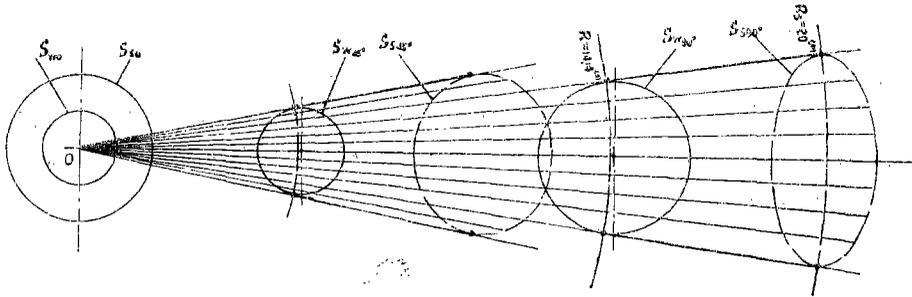


图 9

#### 四、等值线作图问题

在参考球系统中, 结构面的产状可由球面上与其对应的极点N来表示, 每一个结构面都有自己的一个极点, 数百个结构面就有数百极点, 它们散布在球面上。这种离散即说明了结构面分布的自然特点, 也包含着量测上的误差。我们要对之进行加工, 找出它们分布的规律性, 一个主要的办法, 就是找出它们分布的密度, 进而作出等值线图, 以掌握其分布的趋势。

在参考球上A点附近取一球面积 $dA$ , 如果A中含有 $m$ 个极点, 则

$$\sigma = \frac{m}{dA \cdot M} \times 100\%$$

即规定为A点处结构面极点的分布密度，其中M为极点总数。为了提高统计的精度，dA不宜太大；由于极点分布可能极不均匀，作统计用的dA还应该不随A点位置不同而不同。

实际统计工作不是在球面上，而是在赤平投影网上进行的。通常用的一种方法是将绘有几百乃至上千个极点的赤平图用方格网进行划分，网距常取为圆半径的1/10。在方格网的每个节点上取半径为网距作一微圆，可称为计数圆，然后计数落入圆中的极点数，以此数与极点总数之比的百分数作为该点处的密度值。扫描每个节点，找出整个赤平上节点的密度，然后把密度值相等的点联接起来，即得所谓的密度等值线，等值线清楚地表明了结构面产状的优势趋势。

此种方法通常是配合施密特网使用。这时，赤平圆上的计数小圆对应的球面图形将不是圆，它可以通过相反的变换

$$\delta = \sqrt{\frac{R^2 \Delta^2}{4R^2 - \Delta^2}}$$

变成赤平极射投影，然后，再根据极射投影原理反射到球面上。当然，也可根据兰氏投影法则直接反射到球面上去。但是不管其形状如何，由于施密特网具有等面性，与这些计数小圆对应的球面曲线所对应的球面面积应该是等面的。因此，这些直径不变的计数小圆在施密特网中用作极点密度计算具有等价性。

由于吴氏网是一种等角不等面的投影网，因此，等直径计数小圆对应的球面图形虽然都是球面圆，但所对应的球缺面积殊不相等（参见图8），用它作为密度统计的基础，算出的结果也将是不等价的，从而引入误差。

因此，在吴氏网的基础上要用前述统计方法来进行密度计算就必须引入改进，使不等价统计变成等价统计。

设节点i的直角坐标为 $(x_i, z_i)$ ，极坐标为 $(\delta_i, \theta_i)$ ，与之对应的计数圆的半径为 $r_i$ 。我们将不规定一个恒定不变的 $r_i$ 值，因为这样做将使统计不等价，而是要取一个变 $r_i$ 值，使与此 $r_i$ 值对应的球面圆所包含的球缺面面积恒为 $S_v = k \cdot 2\pi R^2$ ，从而使统计等价。

规定 $S_v = k \cdot 2\pi R^2$ ，等于规定

$$l_0 = R(1 - k) = Rc$$

由公式(7)， $r_i$ 需满足关系式

$$r_i = \frac{R}{c + \beta_0} \sqrt{1 - c^2}$$

我们按惯例将取 $k \ll 1.0$ ，则 $l_0$ 十分接近R，这时，为简化计算，可不取(7)式而取(13)式计算 $\beta_0$ ，象(45)式一样，此时

$$\beta_0 = \frac{1 - \left(\frac{\delta_i}{R}\right)^2}{1 + \left(\frac{\delta_i}{R}\right)^2}$$

从而得到

$$r_i = \frac{R \sqrt{1 - c^2}}{c + \frac{R^2 - \delta_i^2}{R^2 + \delta_i^2}} \quad (55)$$

或写为

$$r_i = \frac{R\sqrt{1-c^2}}{c + \frac{R^2 - (x_i^2 + z_i^2)}{R^2 + (x_i^2 + z_i^2)}} \quad (56)$$

这就是用吴氏网作密度计算的等权记数网半径的表达式。下面举一例说明其用法。

令  $R = 1/100$ ,  $c = 0.99$ , 则

$$r_i = \frac{0.141}{0.99 + \frac{R^2 - \delta_i^2}{R^2 + \delta_i^2}} R \quad (57)$$

图10以无量纲坐标绘出了  $r_i$  依赖于节点坐标  $\delta_i = \sqrt{x_i^2 + z_i^2}$  的关系图。图形说明, 为使对应的球缺面积为半球表面积的百分之一, 近赤平圆心处,  $r_i$  值当取半径的百分之七; 当  $\delta_i$  为0.6到0.7倍  $R$  时,  $r_i$  方为半径的十分之一左右; 边缘部分,  $r_i$  需达半径的百分之十四, 比赤平圆心处几乎增加一倍。记数小网经过这样的调整, 就可以吴氏网为基础进行比较精密的密度统计和等直线作图了。

上述办法与文献[1]中提到的规尺作图法函义相类, 由于这里采用了计算公式的形式, 故可望在使用计算机制作等值曲线时使用。

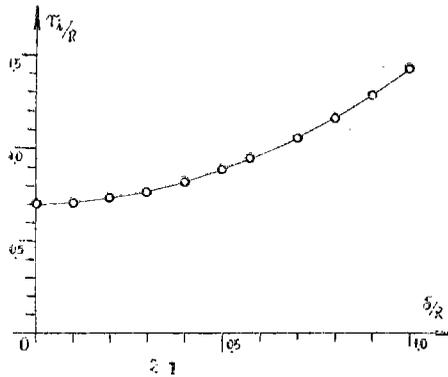


图10

(1) 何作霖 “赤平极射投影在地质科学上的应用”

1965年 科学出版社