

# 内柱体扭摆衰减粘度计测量的基础研究

北京钢铁学院冶金物化教研室

朱元凯 洪彦若 毛裕文等 \*

## 摘 要

内柱体双悬丝扭摆衰减粘度计至今无一适用于较宽粘度范围的公式。本文从简单的理论推导得出粘度与对数衰减率的大致关系,然后对其进行实验修正,得出粘度的半经验公式为  $\eta = \sqrt{I} \cdot \Delta^{1/2} / K$ 。并验证了内柱体双悬丝扭摆的周期公式为  $\tau = 4\pi \sqrt{LI/Mge}$ , 转动惯量的测定式为  $I = I_{已知} \cdot \tau^2 \cdot M / \tau_{已知}^2 \cdot (M + M_{已知}) - \tau^2 M$ 。此外还测量了内柱体的插入深度及偏心度与对数衰减率的关系。

扭摆衰减粘度计由于扭摆体的不同可分为坩埚扭摆和内柱体扭摆两种。前者一般用于测定粘度较小的熔融金属,后者一般用于测量熔盐熔渣粘度。内柱体扭摆衰减粘度计的优点在于设备简单,灵敏度高,一方面它能准确测出其它粘度计(如旋转粘度计)难以测准的小粘度范围,另一方面当扭摆系统附有改变转动惯量的装置时,粘度测量范围可以从几个厘泊(CP)扩大到百泊(P)以上。

国外许多研究者对内柱体扭摆衰减粘度计提出过一些计算公式〔1〕,但或是计算太复杂,或是限制条件过分严格,如装置常数必须用与待测液体粘度值相近的标准油进行标定,这使测定手续繁琐,测量误差加大。我国目前已有许多单位建立了该测量装置,但由于基本规律并未完全摸清,影响了此装置的应用及准确数据的获得,为此,我们对此装置做了系统的基础研究。

## 一、双悬丝内柱体扭摆衰减粘度计的粘度计算公式

内柱体扭摆衰减粘度计由于所用悬丝数目的不同又分为单悬丝与双悬丝两种。双悬丝的优点是稳定性高,数据的重现性好,因而我们选用了这一形式。但这类装置的内柱体(也称为摆锤)为圆柱时所用的计算公式,只见到姚桐斌〔2〕提出的:

$$\Delta - \Delta_0 = C_1 \sqrt{\eta \rho \tau} + C_2 \eta \tau + C_3 \eta \rho \tau \quad (1)$$

式中:  $\Delta$ ,  $\Delta_0$ ——浸入液体中及在空气中时的对数衰减率;

\* 本文参加工作的有李桂芳、郭昭信、叶杏圃等同志。

$C_1, C_2, C_3$ ——常数;

$\tau$ ——扭摆的周期;

$\rho$ ——液体的密度;

$\eta$ ——液体的粘度。

这公式使用起来很麻烦,它需用三种标准油才能标出三个常数。此外,还有一个很大的弱点,即在测量某液体粘度时须先进行预测量,大致知道其粘度后,才可选用与此粘度值相近的三种标油来标定常数,然后再进行正式测定。

为此,有必要找出一个适用于较宽粘度范围的计算公式。若以严格的物理概念,用数学方法加以推导,所得之结果将是非常复杂而实用价值不大。因此,现拟将物理概念适当简化,以推导出一个简单关系,然后再用实验数据进行修正,最后找出一个半经验公式。

双悬丝扭摆装置示于图 1。振动方程为:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + L \frac{d\theta}{dt} + D\theta = 0$$

设  $L = K\eta$ , 得:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\eta \frac{d\theta}{dt} + D\theta = 0 \quad (2)$$

如令

$$2\beta = \frac{K\eta}{I} \quad (3)$$

$$\omega^2 = \frac{D}{I} \quad (4)$$

(2) 式变为:

$$\ddot{\theta} + 2\beta \dot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

其解为:

$$\begin{aligned} \theta &= a_0 e^{-\beta t} \sin(\sqrt{\omega^2 + \beta^2} t + \varphi) \\ &= A \sin(\sqrt{\omega^2 + \beta^2} t + \varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

这里:  $L$ ——阻尼系数;

$\theta$ ——扭转角;

$t$ ——时间;

$I$ ——扭摆系统的转动惯量;

$D$ ——每单位扭转角的扭转力矩,称作恢复力矩;

$\eta$ ——液体的粘度;

$K$ ——决定于坩埚和摆锤的形状和尺寸的常数;

$A$ ——振幅,  $A = a_0 e^{-\beta t}$ 。

从式 (5) 可见,这个扭转衰减是个简谐振荡,其振幅是按几何级数衰减的,它可以用相邻两个周期的振幅之比来表示:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_{n+1}}{A_{n+2}} = \dots = K$$

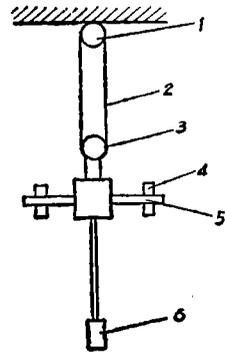


图 1

式中下标  $n, n+1, \dots$  表示这一振幅是分别属于第  $n, n+1, \dots$  次振动的。由于是衰减振动，所以比例系数  $K > 1$ ，令  $\Delta = \ln K$  称作对数衰减率，则：

$$\Delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \ln \frac{a_0 e^{-\beta t}}{a_0 e^{-\beta(t+\tau)}} = \ln e^{\beta \tau} \quad (6)$$

式 (6) 表明，当被测液体确定后， $\Delta$  应为定值，即  $\ln A$  与周期数的关系应为一线性关系。本装置所测结果示于图 2。从图 2 看出  $\log A \sim$  周期数之间确系直线关系，说明双悬丝与单悬丝一样都是简谐振荡的。

但是它们的振荡周期计算公式却有很大不同，单悬丝的周期是：

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \quad (7)$$

对此式验证的结果表明，它不适用于双悬丝振荡系统。后来采用了 H. R. Thresh (3) 提出的周期公式：

$$\tau = 4\pi \sqrt{\frac{IL}{Mge^2}} \quad (8)$$

式中：L——丝长；  
M——悬挂系统的质量；  
g——重力加速度；  
e——悬丝间距。

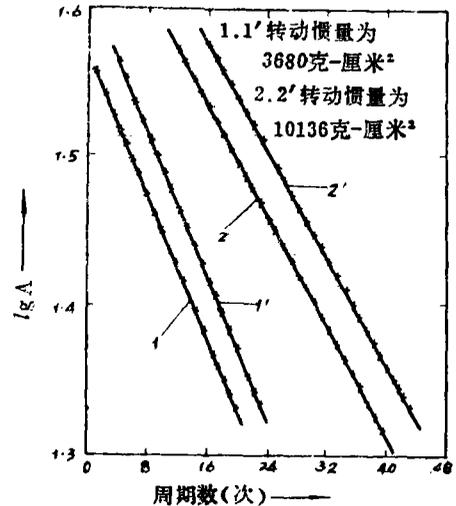


图2 振幅与时间关系 (测量物质粘度308.7CP)

实验结果表明这一计算公式是完全适用的 (详细讨论见下节)。将此公式及 (6) 式代入 (3) 式就得到：

$$K \eta = \frac{2\Delta \cdot I}{\tau} = \frac{2\Delta \cdot I}{4\pi \left( \frac{IL}{Mge^2} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{I} \cdot \Delta}{2\pi \left( \frac{L}{Mge^2} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

如果  $M, e, L$  固定 (即粘度计悬挂系统固定) 时：

$$2\pi \left( \frac{L}{Mge^2} \right)^{\frac{1}{2}} = K' = \text{常数}$$

$$\therefore K \eta = \frac{\sqrt{I} \cdot \Delta}{K'}$$

当坩埚和内柱体的形状及大小固定时， $K$  也为定值。这样最后就得出：

$$\eta = \frac{\sqrt{I} \cdot \Delta}{K_0} \quad (9)$$

其中： $K_0 = K \cdot K'$ 。

常数  $K_0$  称为装置常数，它实际上是坩埚，内柱体，悬挂系统的重量，悬丝长度和间距等的函数。因此，若令  $K_0$  为常数时，上述几个因素必须固定。 $K_0$  可以通过已知粘度的标准油进行标定， $I$  也可事先测出，然后只须测定出对数衰减率就可计算出粘度值。

但是从上述情况可知，公式推导中仅考虑到一些主要因素，如设  $L = K \eta$ ，就是极为简

化了了的，严格说它应为一个相当复杂的复变函数方程，是  $D, I, \tau, \beta, \Delta$  等的函数。因此 (9) 式只是一个近似公式，仍须通过实验对其进行修正。为了修正这一公式，我们分两步进行实验。

1. 固定转动惯量 ( $I$ ) 测定一系列已知粘度的标准溶液。

这时  $\frac{\sqrt{I}}{K} = C = \text{常数}$ 。

所以 (9) 式可表示为

$$\eta = C\Delta \quad (10)$$

测量结果列于表 1。

表 1 转动惯量为 2638 克-厘米<sup>2</sup>，圆柱形内柱体的测定结果

粘度 CP	424	354	297	212	157	88.8	68.1	42.9	28.7	14.3	10.0	7.31	4.25
$\Delta \times 10^3$	36.3	31.2	26.4	21.2	17.4	9.50	7.94	5.61	3.91	2.34	1.80	1.59	0.98

可是用表 1 数据，按式 (10) 作图 (见图 3) 并非直线，即  $C$  不是常数。为了进一步弄清  $\eta$  与  $\Delta$  的关系，将其取对数作图，结果得出一线性关系，其斜率为 1.2。

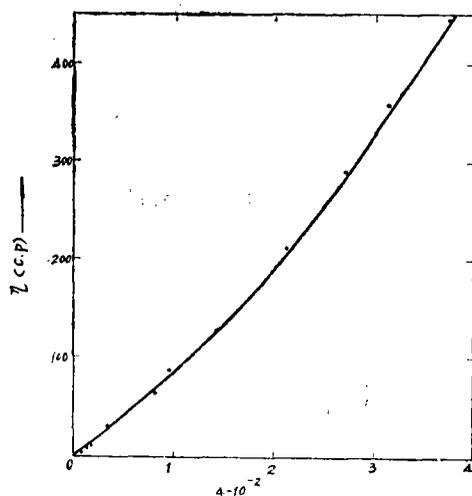


图3 粘度与对数衰减率的关系

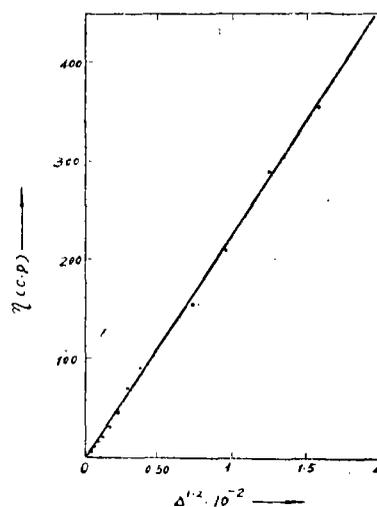


图4 粘度与对数衰减率  $\Delta^{1.2}$  的关系 (圆柱形内柱体)

这样，式 (10) 应修正为：

$$\eta = C' \Delta^{1.2} \quad (11)$$

现将表 1 数据按  $\eta$  与  $\Delta^{1.2}$  关系作图 (见图 4)，得一条从原点开始的直线。按回归分析法计算，此线的相关系数  $\gamma$  为：

$$\gamma = 0.997$$

斜率

$$C' = 2.201 \times 10^4$$

直线从原点开始是合理的，因为公式中所示的对数衰减率为：

$$\Delta = \Delta_{\text{测}} - \Delta_0$$

其中： $\Delta_{测}$ ——测定某液体时的对数衰减率；  
 $\Delta_0$ ——在空气中空摆时的对数衰减率。

所以，当  $\Delta = 0$  时， $\eta$  应等于零。

为了校验公式的可靠性，我们在另一个装置上（见图 5）作了一组数据，结果列于表 2。此装置的惯性体为直径 60 毫米，高 40 毫米的铅质圆柱体， $I = 3581$  克-厘米<sup>2</sup>，内圆柱体为椭圆柱。

用表 2 数据按  $\eta \sim \Delta^{1.2}$  作图（见图 6），结果仍然为一通过原点的直线，其相关系数  $\gamma = 0.974$ ，斜率  $C' = 2.92 \times 10^4$ 。

此  $C'$  值与前一装置不同，是因为  $C'$  实际上包含  $I$  与装置常数  $K_0$ 。现在这两个值均与前装置不同，所以  $C'$  也不同。但是此装置的数据既然也能得出常数  $C'$ ，则进一步说明式 (11) 是正确的，即式 (9) 的  $\Delta$  应加 1.2 次方：

$$\eta = \frac{\sqrt{I} \cdot \Delta^{1.2}}{K_0}$$

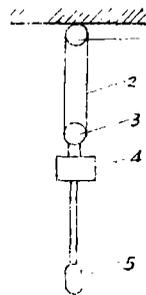


图 5

表 2 转动惯量为 3581 克-厘米<sup>2</sup>，椭球形内柱体的测量结果

粘度 CP	123	92.6	88.8	68.1	56.9	42.9	37.2	28.7	25.5	19.9	18.0
$\Delta \times 10^3$	10.5	7.97	7.94	6.97	5.49	4.36	3.82	3.08	2.66	2.38	1.97

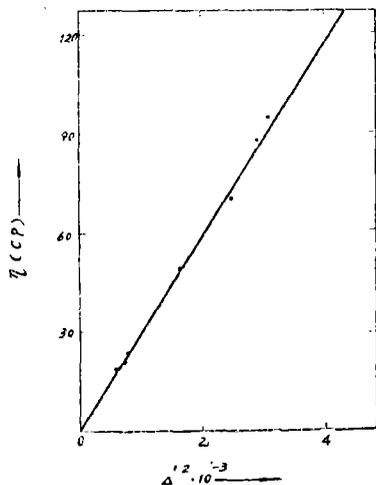


图 6 粘度与对数衰减  $\Delta^{1.2}$  的关系（椭球形内柱体）

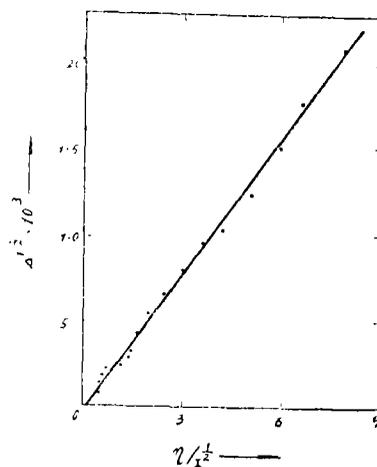


图 7 对数衰减率与  $\eta^{1/2}$  的关系

2. 改变转动惯量进行测定以检验  $I^{1/2}$  是否正确。

我们按图 1 装置对某一液体（即固定  $\eta$ ）测定  $I$  改变时  $\Delta$  的变化规律。测定结果列于表

3。

如果  $I^{1/2}$  正确，则前式应为：

$$\Delta^{1.2} = K_0 \frac{\eta}{I^{1/2}}$$

表 3

改变转动惯量时的对数衰减率

粘度 (CP)	I (克-厘米 <sup>2</sup> )	$\eta/I^{\frac{1}{2}}$	$\Delta \times 10^3$	$\Delta^{1.2} \times 10^3$
37.2	10136	0.369	2.80	0.815
"	8052	0.413	3.28	1.04
"	6290	0.469	3.57	1.16
"	4825	0.536	4.48	1.52
"	3680	0.614	5.44	1.92
"	2830	0.725	6.47	2.36
123	10136	1.22	11.0	2.66
"	8052	1.36	11.7	2.96
"	6290	1.55	13.5	3.51
"	4825	1.77	18.3	4.51
"	3680	2.03	20.4	5.53
"	2630	2.40	23.3	6.50
222	4825	3.20	18.3	8.24
"	2680	3.66	20.4	9.13
"	2630	4.33	23.3	10.2
435	6290	5.48	26.8	12.7
"	4825	6.26	30.5	15.2
"	3686	7.18	35.5	18.2
"	2630	8.48	40.23	21.2

将表 3 中的数据按  $\Delta^{1.2} \sim \eta/I^{\frac{1}{2}}$  关系作成图 7, 可见图中曲线仍为一条通过原点的直线。其回归分析法计算的相关系数为 0.992, 斜率  $K_0 = 2.46 \times 10^{-3}$ 。  $K_0$  即为装置常数, 此数据与表 1 数据都出自于同一装置, 因此由表 1 数据得出的  $K_0$  应与  $2.46 \times 10^{-3}$  相近。

从表 1 数据得出:

$$C' = 2.20 \times 10^4$$

$$\therefore C' = \frac{I^{\frac{1}{2}}}{K_0}$$

$$\therefore K_0 = \frac{I^{\frac{1}{2}}}{C'} = \frac{2638^{\frac{1}{2}}}{2.20 \times 10^4} = 2.34 \times 10^{-3}$$

两者相对误差为 5%, 这是由于实验误差引起的, 特别是改变 I 这个因素时很容易带入误差 (变换 I 时, I 的误差就达 2%)。因此, 这两个结果表明转动惯量项取  $I^{\frac{1}{2}}$  是正确的。

综合上述结果可以得出, 双悬丝内柱体扭摆衰减粘度计的计算公式为:

$$\eta = \frac{I^{\frac{1}{2}} \Delta^{1.2}}{K_0} \quad (12)$$

## 二、转动惯量的测定

为了验证周期公式并测量转动惯量，我们做了三个规则的圆环形铅片（见图 8）。按转动惯量公式（13）计算  $I$ ，其值列于表 4。

$$I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2) \quad (13)$$

式中： $m$ ——圆环质量；

$R_1, R_2$ ——圆环内外半径。

为了测量系统的转动惯量，可先测出此系统的扭摆周期，然后加上已知惯量的铅片再测一次周期，即可利用式（8）将系统的  $I$  求出。例如，设系统的转动惯量为  $I_1$ （欲求值），周期为  $\tau_1$ ，重量为  $M_1$ 。加上一重量为  $M_2$  的铅片后，转动惯量为  $(I_1 + I_2)$ ，周期为  $\tau_2$ ，系统重量为  $(M_1 + M_2)$ 。这时

$$\tau_1 = 4\pi \sqrt{\frac{I_1 L}{M_1 g e^2}}$$

$$\tau_2 = 4\pi \sqrt{\frac{(I_1 + I_2)L}{(M_1 + M_2)g e^2}}$$

两式联立得出：

$$I_1 = \frac{I_2 \tau_1^2 M_1}{\tau_2^2 (M_1 + M_2) - \tau_1^2 M_1} \quad (14)$$

利用此式可求得  $I_1$ 。表 4 中的数据是装置一（未加横丝杆和惯性轮，系统重量为 510 克）的转动惯量的测量结果。其平均值为 708.6 克-厘米<sup>2</sup>，最大偏差为 0.79%。

表 4 装置一的转动惯量的测定结果

次 数	1	2	3	4
铅片重 (克)	(不加 Pb 片)	607.2	976.9	1162.4
铅片转动惯量 $I$ (克-厘米 <sup>2</sup> )		751.4	1494	2243
周期 $\tau$ (秒)	2.13	2.68	2.96	3.14
所测装置一的转动 惯量 (克-厘米 <sup>2</sup> )		705.2	710.0	710.8

在测出转动惯量的同时，也证明（8）式能适用于本装置。曾用所测数据代入单丝周期公式  $\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}$  中进行计算，但得不到一致的转动惯量，因而表明此式不能用于双悬丝扭摆系统。

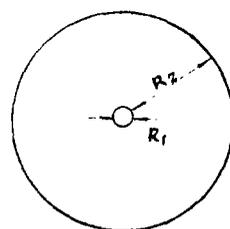


图 8

### 三、关于影响测量准确性的几个问题

#### 1. 悬丝材料及其处理

悬丝的弹性和内摩擦将影响到振荡的衰减情况，引起测量误差，因此悬丝材料应注意选择。日本前川等人〔4〕提出用钢琴丝及磷青铜丝时振动的重现性差，而用0.7毫米以下的钨丝重现性较好。森田善一郎等人〔5〕提出用0.3毫米的钨丝或0.2毫米的钼丝都可得到重现性很好的结果。我们使用了0.2毫米钨丝，0.18毫米钼丝及0.2毫米铍铜丝，证明都能得到均匀衰减的结果，重现性也都不错。现将铍铜丝及钼丝的使用结果分别绘于图2及图9。

但应注意的是悬丝在使用前应先进行退火，否则使用初期测定结果将是不稳定的。我们

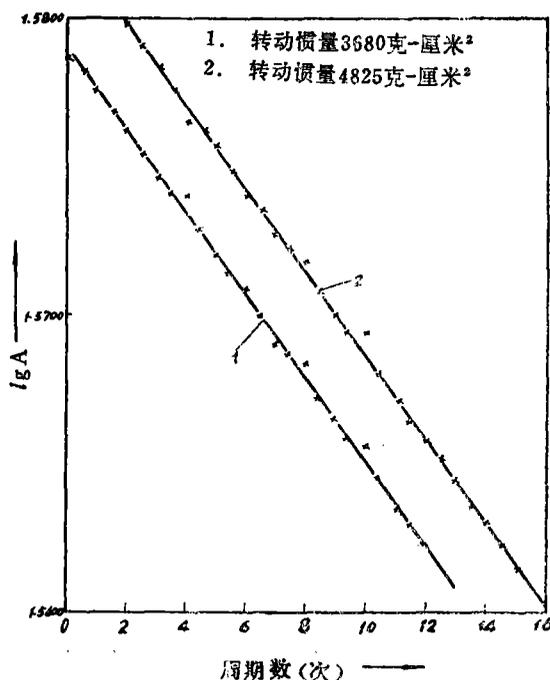


图9 钼悬丝的振幅衰减与时间关系

由于钨丝韧性较差，常选用铍青铜丝或钼丝。

测量时为了避免发生紊流而引起衰减振动的异常现象（即非简谐振动），必须将扭摆周期调整到3秒以上。从周期公式（8）可知  $I$ 、 $L$ 、 $M$ 、 $e$  都是调整因素，此外还与悬丝材料有关。根据本设备情况，我们采用  $L=300$  毫米， $e=10$  毫米，直径为0.2毫米的铍铜丝，当  $I$  大于2500克-厘米<sup>2</sup>时，周期可达3.8秒以上。

#### 2. 惯性的选择

测量装置必须加上一定的惯性体以增加测量的稳定性。惯量的大小与测量的准确度及周期都有密切关系，必须注意选择。当用图1的装置时，中心体为510克，横丝杠长为180毫米，惯性轮重25克，这种情况下的转动惯量可从2500克-厘米<sup>2</sup>改变为11000克-厘米<sup>2</sup>，周期从3.8到6.5秒。

采用的悬丝退火装置，如图10所示。条件是将1.2公斤的重物加于铍铜丝上，在100℃时恒温退火半小时；而钼丝则在300℃时恒温退火半小时。退火后除去重物，如果两根悬丝都已平直，即可使用。铍铜丝亦可用荷重1.2 Kg放置1—2天代替退火。

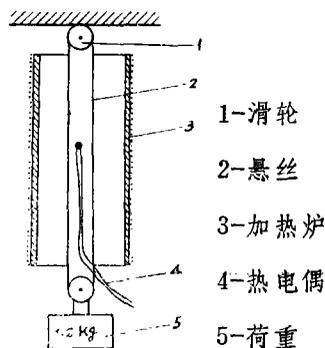


图10

这个惯量范围已能满足测定500厘泊以内的粘度。欲增大测量范围,可增加惯性轮重量。据文献(6)报导,适当选择转动惯量及悬丝,这种设备可测至 $1.14 \times 10^4$ 泊。但从我们试验的情况看来,测至100泊左右是完全有可能的。

惯量的选择标准是:数据重现性好,误差小,对数衰减率必须是时间的线性函数。一般应将惯量调整到使每个周期的振幅减少控制在1~30毫米范围内为佳。振幅衰减速度小,振幅读数的相对误差大。但由于振幅还靠目测读数,衰减速度太大则势必不易读准,同时可读的振荡次数也太少,也使误差加大。因此应调整惯量或其它因素,使之处于上述范围。

为了使转动惯量处于最佳范围,惯量需经常变化。按照图1装置可利用调整惯性轮间距,改变惯性轮重量来进行调整。本装置在未加横丝杆和惯性轮之前,转动惯量为708.6克-厘米<sup>2</sup>,设此值为 $I_1$ ,相应周期为 $\tau_1$ ,重量为 $M_1$ ;加上横丝杆和惯性轮后,其值为 $I_2$ , $\tau_2$ , $M_2$ ,则从周期公式可得:

$$I_2 = \frac{\tau_2^2 I_1 M_2}{\tau_1^2 M_1} \quad (15)$$

本装置惯性轮重为74.9g(两惯性轮及丝杆重量之和),两惯性轮间距从50毫米改变到220毫米时, $I$ 值可从2630调整到10140克-厘米<sup>2</sup>。如果两惯性轮重量加大到772.5克,轮间距为230毫米时, $I$ 值可达18270克-厘米<sup>2</sup>。

### 3. 内柱体插入深度的影响

如前所述,装置常数 $K_0$ 系通过标准液体(即已经确知其粘度的液体)标定出来的, $K_0$ 一旦标定后,测试条件就应保持与标定时条件相一致。实际操作中转动惯量,悬丝长短,摆锤(即内柱体)大小等均易固定,唯摆锤插入深度及偏心度往往难于保持一致,这对能否保持 $K_0$ 不变及实验的准确与否都有一定影响。

实验时所用坩埚内径为45毫米,高75毫米,液体在坩埚内的装入高度约60毫米。所用内柱体为直径15毫米,高26毫米的椭球,联杆直径为4毫米。在此条件下测定了插入深度与对数衰减率的相互关系,现用摆锤与坩埚底的距离来表示插入深度,将测定结果示于图11。

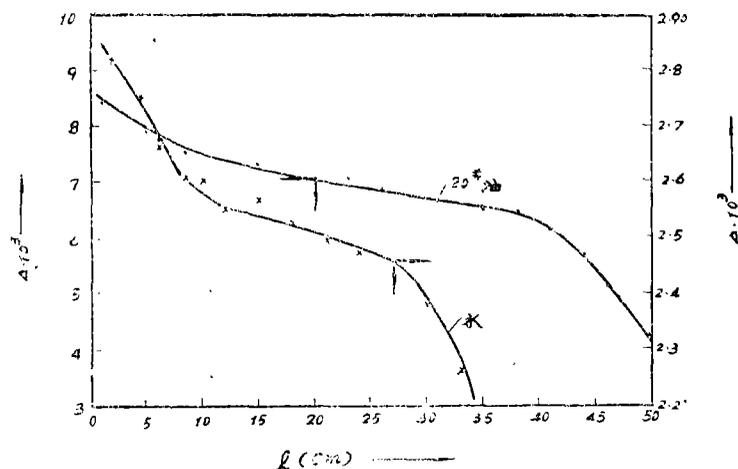


图11 摆锤距坩埚底的距离与对数衰减率的关系

由图可见，曲线在10~30毫米的距离处对数衰减率的变化是不大的。换句话说，内柱体离坩埚底10毫米以上及在液面下5毫米这段范围内插入深度的影响不大，这就是最佳插入深度。但从图中可以看出，即使在这段范围内，对数衰减率仍稍有下降。这主要是由于联杆与液体的接触面改变所引起的，如果减小联杆直径或相对增大内柱体直径，则在此范围内的下降趋势还将降低。当然，联杆直径也不能太小了，否则将大大降低它在高温下的强度和使用寿命。

#### 4. 偏心度的影响

在上述尺寸的内柱体和坩埚的条件下，内柱体与坩埚中心的偏离程度（即偏心度）对对数衰减率也有一定影响，测定结果示于图12。可见偏心度小于6毫米时，对数衰减率不受偏心度的影响。事实上，偏心度的影响实质上还是内柱体距坩埚壁距离的影响（这个距离大于10毫米左右，则对数衰减率保持不变），因而加大坩埚直径或减小内柱体直径都将放宽可允许的偏心度的范围。

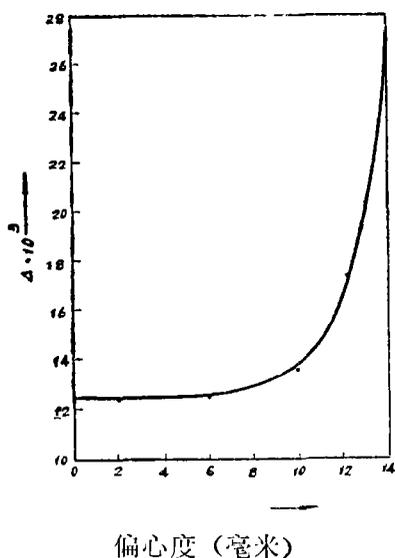


图12 对数衰减率与偏心度的关系

### 结 论

1. 双悬丝内柱体扭摆衰减粘度计的计算公式为：

$$\eta = \frac{I^{\frac{1}{2}} \Delta^{1.2}}{K_0}$$

2. 双悬丝扭摆系统的周期公式应采用：

$$\tau = 4\pi \sqrt{\frac{IL}{Mge^2}}$$

用已知 $I_{\text{已知}}$ 的物体标定系统 $I$ 的公式是：

$$I = \frac{I_{\text{已知}} \tau^2 M}{\tau^2_{\text{已知}} (M + M_{\text{已知}}) - \tau^2 M}$$

3. 悬丝用铍青铜或钼丝均可获得稳定测量值。
4. 不同的粘度测量范围所采用的转动惯量应不一样, 粘度越大,  $I$  应越大。
5. 当内柱体距坩埚底10毫米以上及在液面 5 毫米以下的插入深度, 偏心度小于 6 毫米时对粘度测定影响不大。

#### 参 考 文 献

1. H.R.Thresh "Trans. Amer. Soc. Metals" vol.55, 1962, 790.
2. T.P.yao et.al. "Journal of the Institute of metals", 1952, 1410.
3. H.R.Thresh "Trans. Met. Soc. AIME" vol.233, 1965, 79.
4. 前川等: "学振19委8269 (反应217)" (Sept.1966)
5. 森田善一郎等: "铁と钢" No13, 1970, 1613—1632.
6. J.S.Maehine et. al "Journal of Amer. Cera. Soc." vol.28, 1945,310.