DOI:10.13374/j.issn1001-053x.1983.01.016

轧制过程宽展问题的有限单元法分析

力学教研室　乔 端　林 桐

摘　要

本文根据刚塑性有限单元法，采用20节点曲六面体等参单元对平辊轧制过程进行了分析。求得金属三维流动的速度场，以及在稳态轧制时轧件的外轮廓形状等，并与实验结果进行了比较。

一、前　言

轧制是一种重要的金属加工成形过程。平辊轧制过程宽展的预测对于厚板、方钢的轧制是十分重要的。

在板带轧制过程中，如果宽高比大于10时，通常忽略轧件在宽度方向的宽展。这样的轧制过程可以认为是平面应变问题。现有的多数轧制理论主要是关于平面应变条件下轧制压力，轧制力矩等的计算。至于轧制过程的三维变形问题，由于其边界条件和变形的复杂性，长期来未能在理论上得到很好的解决。主要是停留在实验方面的观察。曾提出了一些轧制过程关于宽展计算的经验公式[1-5]。Chitkara等[6]进行了铅条的轧制实验，并将其实验结果与经验公式进行了比较。

五弓[5]在假设作用于轧制辊缝中切片单元上的应力均匀分布和轧件宽展形状为抛物线的条件下，给出了宽展的表达式。Alexander等[1]也给出了宽展轮廓的数学表达式。Hill[7]导出了分析金属加工过程的一般近似方法，并应用其预测轧制过程的宽展。Lahoti等[8]在忽略轧辊与轧件间摩擦的条件下，完成了宽展的计算。

1975年Oh等[9]根据刚塑性体的极值原理（上界法）分析了轧制过程的三维变形。根据同样的原理，加藤等[10]进一步考虑了轧件侧面的鼓形和横断面的翘曲，改进了Oh等的结果。

本文根据刚塑性有限单元法，采用20节点曲六面体等参单元对平辊轧制过程进行分析求得金属三维流动的速度场，以及稳态轧制时轧件的外轮廓形状等。并与实验结果进行比较。本文还讨论了用刚塑性有限单元法处理这类稳态流动问题的方法。

*本文曾在北京钢铁学院建校30周年科学研究报告会上宣读(1982年4月)。

二、基本原理和计算方法

关于刚塑性有限单元法的基本原理以及20节点曲六面体等参单元的详细说明可参阅文献[11-15]。现简要叙述如下：

根据刚塑性体的广义变分原理，速度场的正确解使得泛函

$$\Phi=\int_V \bar{\sigma}\,\dot{\bar{\varepsilon}}\,dv-\int_{S_T}\mathbf{T}^T\mathbf{U}ds+\int_V \lambda\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T\mathbf{C}dv \tag{1}$$

取得驻值。式中$\bar{\sigma}$和$\dot{\bar{\varepsilon}}$分别为等效应力和等效应变速率；$\mathbf{T}$为物体表面S_T上给定的外力列阵；$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$和$\mathbf{U}$分别为应变速率列阵和速度列阵；$\mathbf{C}$为矩阵。体积不可压缩条件为$\dot{\varepsilon}^T\mathbf{C}=0$。对于空间问题$\mathbf{C}=(111000)^T$。$\lambda$为Lagrange乘子。

将连续体离散化成具有N个自由度的M个单元。则第m个单元的泛函为

$$\varphi^{(m)}=\int_{V^{(m)}}\bar{\sigma}\left(\frac{2}{3}\mathbf{u}^T\mathbf{k}\mathbf{u}\right)^{\frac{1}{2}}dv+\lambda\mathbf{u}^T\mathbf{Q}-\mathbf{u}^T\mathbf{F} \tag{2}$$

式中， $\mathbf{K}=\mathbf{B}^T\mathbf{B}$； $\mathbf{Q}=\int_{V^{(m)}}\mathbf{B}^T\mathbf{C}dV$，

$$\mathbf{F}=\int_{S_T^{(m)}}\mathbf{N}^T\mathbf{T}dS$$

$\mathbf{B}$和$\mathbf{N}$分别为单元的应变矩阵和形状函数。

可由泛函的极值条件得到关于$\mathbf{u}$和λ的非线性方程组。用摄动法求解。设第n次计算的速度场$\mathbf{u}_n$是由第n－1次计算的速度场$\mathbf{u}_{n-1}$与微小增量$\triangle\mathbf{u}_n$之和

$$\mathbf{u}_n=\mathbf{u}_{n-1}+\triangle\mathbf{u}_n$$

则得到矩阵方程为

$$\begin{bmatrix}Y\mathbf{P}_{n-1} & \mathbf{Q}\\ \mathbf{Q}^T & \mathbf{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\triangle\mathbf{u}_n\\ \lambda_{(n)}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}Y\mathbf{H}_{n-1}\\ \mathbf{Q}^T\mathbf{u}_{n-1}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{F}\\ \mathbf{O}\end{bmatrix} \tag{3}$$

其中各单元的$\mathbf{P}_{n-1}$，$\mathbf{H}_{n-1}$由下式计算

$$\mathbf{P}_{n-1}=\frac{2}{3}\int_{V^{(m)}}\frac{1}{\dot{\bar{\varepsilon}}_{n-1}}\left[\mathbf{K}-\frac{2}{3\dot{\bar{\varepsilon}}^2_{n-1}}\mathbf{b}_{n-1}\mathbf{b}^T_{n-1}\right]dv$$

$$\mathbf{H}_{n-1}=\frac{2}{3}\int_{V^{(m)}}\frac{1}{\dot{\bar{\varepsilon}}_{n-1}}\mathbf{b}_{n-1}dV$$

$$\mathbf{b}_{n-1}=\mathbf{k}\mathbf{u}_{n-1}$$

Y为单向拉伸时的屈服应力。对于硬化材料它是ε的函数。

给定运动许可速度场的初值$\mathbf{u}$。利用（3）式重复迭代计算，直至收敛。这时的速度场即认为是正确解。

20节点曲六面体等参单元有60个自由度。在局部坐标（ξ，η，ζ）下，中心在原点，边长为2的立方体单元，取其顶点及12条棱边中点为节点（图1）。

记节点的函数值为ui，则插值函数u，相应的形状函数N_i，单元的应变速率$\dot{\varepsilon}$，以及计算每一单元的**Q**，**F**,**P**,**H**的十四点求积公式可参阅文献〔15〕中的(3-6)—(3-13)式。

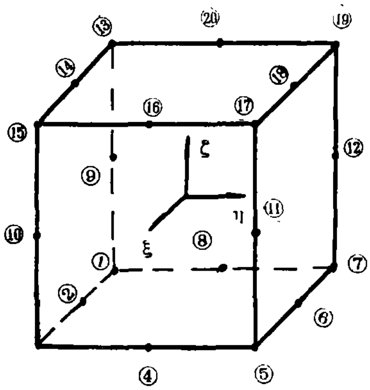


图 1　20节点曲六面体单元

当轧制处于稳态过程，位于辊缝附近的部分材料处于塑性变形区。而刚塑性体变分原理适用于全域均发生塑性变形的情况。因此对于轧制过程应首先估计一个包括辊缝在内的比较大的变形区。然后应用刚塑性有限单元法计算这个域内各点的等效塑性应变增量$\overline{d\varepsilon^p}$，对于$\overline{d\varepsilon^p}$小于某一定值的部分即认为是不变形的刚性区。这样通过计算近似确定塑性变形区的范围，然后再在这个塑性变形区内应用刚塑性有限单元法进行计算。

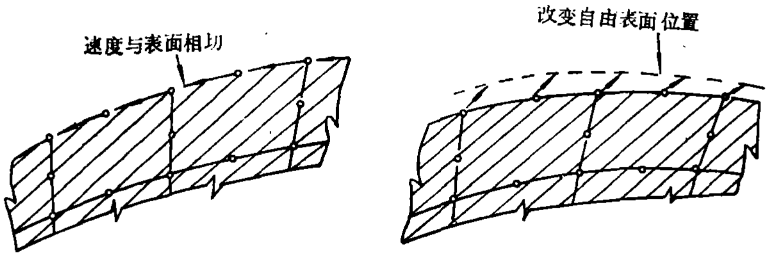
当运动许可速度场不随时间改变时，称为稳态的运动许可速度场。如果变形区内材料的流动速度矢量为**u**，物体自由边界表面外法线方向为**n**，则材料在稳态流动时必须满足下列两个条件：

(1)$\mathbf{u}_s \cdot \mathbf{n} = 0$，　在变形区自由边界上　(4)

(2)$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0$，在整个变形区内　(5)

第一个条件表示在自由边界上，流动速度的方向应与边界表面相切，否则即改变了自由边界表面的形状。

为了形象地说明这一条件的几何意义，在图2中给出当材料在xy平面内流动时的部分自由边界。图2-(a)，(b)分别表示稳态与非稳态时的自由边界(图中"。"表示单元节点)。这时，边界上一点的坐标为x，y，于是有



(a)　(b)

图 2　材料在xy平面流动时的自由边界

$$\alpha = \frac{dy}{dx} \tag{6}$$

和
$$\alpha = \mathrm{arctg}\ \frac{u_{ys}}{u_{xs}} \tag{7}$$

其中，α为速度矢量与x轴间的夹角；u_{ys}和u_{xs}分别表示速度矢量在x，y轴上的投影。(6)，(7)式表示速度矢量的方向与边界相切。

第二个条件((5)式)表示体积不可压缩条件。对于变形区内任一封闭曲面，单位时间内流入这个域中的材料与流出的材料相等。

对于轧制过程的宽展问题，由于事先并不知道整个变形区的外轮廓，需要通过计算才能求得。现采用将轧件逐步送入辊缝的办法进行计算。现考虑矩形断面轧件在轧制过程的宽展问题。由于断面上下，左右对称，今取轧件的1/4进行计算(如图3所示。图中“.”为单元节点)。轧件的宽度(x方向)在刚性区为一常量。当轧件产生塑性变形的部分，通过计算求出边界上各点的速度，然后由此速度求得△t时刻后自由边界的形状。

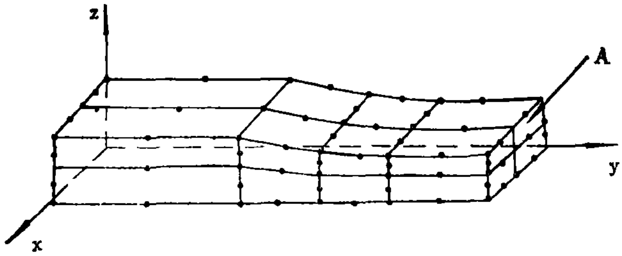


图 3　计算的1/4部分轧件以及单元的划分

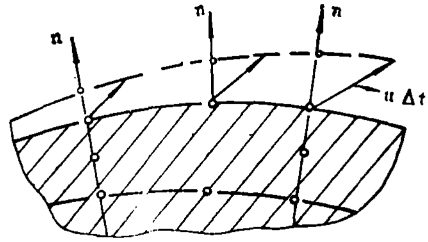


图 4　改变自由边界形状具体作法的图示

图4为当材料在平面内流动时，改变自由边界形状具体作法的图示。首先求出各节点的速度，然后求出通过这些节点的边界外法线方向。将速度矢量投影到外法线方向上，作为这些节点的位移值。依此，直到满足(4)，(5)式为止，便认为达到稳态的流动过程，这时通过各节点的边界便是稳态轧制时轧件的外轮廓形状。

对于三维流动过程，为了求得边界上各节点的位移值，可以通过下列步骤进行计算。

1.求边界面上的法线、

设自由流动的边界面在局部坐标系中，其方程为$\xi=1$。因而在整体坐标系中，其参数方程为

$$\left.\begin{aligned} X &= X(1,\eta,\zeta) \\ Y &= Y(1,\eta,\zeta) \\ Z &= Z(1,\eta,\zeta) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

它在任一点处的切平面是由两个切矢量

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r}_\eta &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}, \frac{\partial y}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) \\ \mathbf{r}_\zeta &= \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}, \frac{\partial y}{\partial \zeta}, \frac{\partial z}{\partial \zeta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

所组成。空间曲面上一点的切平面由矢量积所确定，即

$$\mathbf{r}_\eta \times \mathbf{r}_\zeta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \tag{10}$$

其中i，j，k分别表示沿x，y，z轴方向的单位矢量。于是有

$$|\mathbf{r}_\eta \times \mathbf{r}_\zeta| = \left[\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \zeta} - \frac{\partial z}{\partial \zeta}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{EG-F^2} \tag{11}$$

这里简记

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

$$F=\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2$$

则边界表面外法线方向为

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_\eta\times\mathbf{r}_\xi}{|\mathbf{r}_\eta\times\mathbf{r}_\xi|}=\frac{1}{\sqrt{FG-F^2}}\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}-\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}\end{array}\right\} \tag{12}$$

2.求速度矢量u在边界表面外法线上的投影

边界表面外法线与速度矢量间夹角的余弦为

$$\mathrm{COS}\ (\mathbf{u},\mathbf{n})=\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{u}|\cdot|\mathbf{n}|} \tag{13}$$

于是可以求得**u**在**n**上的投影

$$\mathbf{u}_n=|\mathbf{u}|\cos(\mathbf{u},\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n} \tag{14}$$

三、计算实例以及与实验结果的比较

本文计算了在辊径为101.6mm轧机上轧制断面为$9.525\times9.525mm^2$铅条的情况。轧后铅条厚度为7.366mm，压下率为22.6%。这样的轧制过程可以模拟热轧方钢的情况。假设轧辊与轧件间为粘着摩擦；轧件为理想刚塑性材料。根据对称条件，取轧件的1/4进行计算。其边界条件为（见图3）：

$$\begin{cases} X=0\ \text{面上，}u_x=0\\ Z=0\ \text{面上，}u_z=0\\ Y=0\ \text{和A面上，}u_y=\text{常数，}\\ \qquad\qquad Y\text{方向的合力}\Sigma T_y=0\\ \text{与轧辊接触面上，}u_x=0\text{，}u_z/u_y=tg\alpha\text{，}\\ \qquad\qquad\text{即轧件速度与轧辊表面相切，}\\ \qquad\qquad\text{且有}\sqrt{u_y^2+u_z^2}=u_R\\ \qquad\qquad(u_R\text{为轧辊表面速度）}\\ \text{其他为自由表面}\end{cases}$$

必须指出的是，在Y＝0和A面上，应认为两侧的刚性区对变形区有约束作用，所以u_y必须为一定值，但在无前后张力轧制时，应使轧制方向的合力$\Sigma Ty=0$。在计算时可先给定在这两个界面上的u_y值的初始设定速度场。计算出收敛的速度场后，再求界面上

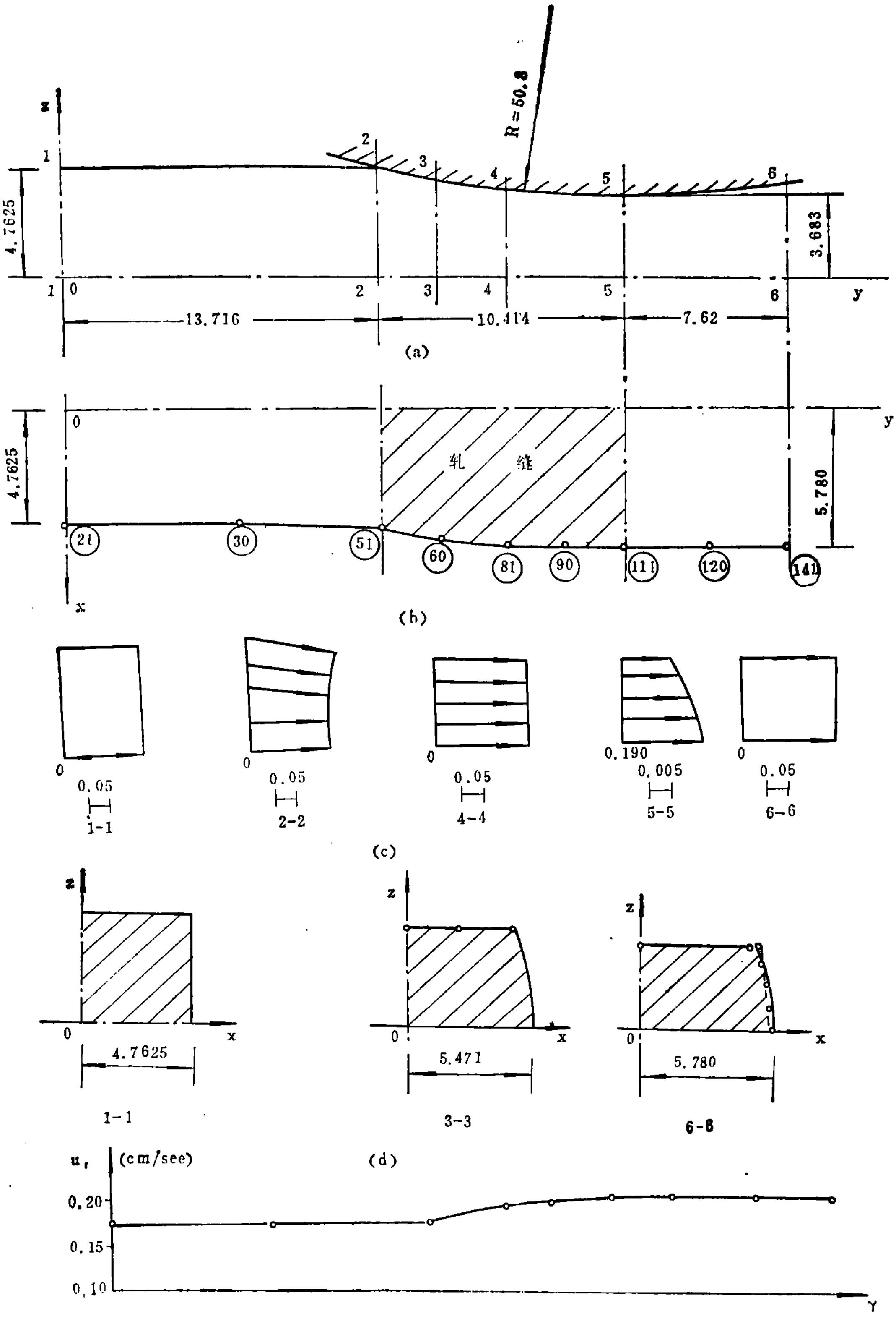


图 5 轧制问题的计算结果

的ΣTy。如果$\Sigma Ty \neq 0$，则改变界面上的u_y值，直至$\Sigma Ty = 0$。

计算时，为了节省计算时间，先沿轧制方向分成四个单元。按以上所说的步骤计算其宽度，直到外形的变化接近稳定时，将计算所得到的轧件变形后的节点坐标及速度场按线性插值划成16个单元（图3）进行计算。这样做容易得到收敛的初速度场，可以减少计算时间。对于16个单元的计算相当于从一个有初始宽度的外形开始，于是可以减少为达到稳定的外形所需要的"送入"次数。整个计算过程收敛性极佳。计算出收敛的初速度场后每次"加载"迭代1次即可收敛。

计算结果如图5所示。其中(a)为轧制中心线上断面尺寸。(b)为轧件在$Z=0$截面上的宽展图。(c)为轧制中心线纵断面上的速度分布图。(d)为各个横断面的形状。(e)为中心线上轧制方向速度变化的情况。由(c)可以看出，由于粘着摩擦条件，与轧辊接触的轧件表面与轧辊的圆周线速度相等。在轧件中部轧制方向的速度u_y与轧件表面不同。在靠近入口侧，轧件中部的u_y低于表面处的（后滑区）；而在出口侧，轧件中部的u_y高于表面处的（前滑区）。在前滑区与后滑区之间存在一个面，其上轧制方向的速度u_y与轧件表面处的相同（中性面）。由(b)可以看出，轧件的宽展主要发生于后滑区。计算还表明，等效塑性应变增量在后滑区比前滑区大得多。在整个轧制过程，在后滑区中所完成的变形量是轧件通过辊缝后总变形量的80.4%。在图6中给出分别位于前滑区与后滑区中的2-2。5-5两个横断面上轧制方向速度的分布规律（图中数字表示该线上的速度值，其单位为cm/sec）。在粘着摩擦条件下，横断面上沿轧制方向的金属流动速度主要与z坐标有关，沿宽度方向比较均匀。对于相同的z坐标，在后滑区中轧件侧面速度略低于中心纵断面上的速度；而在前滑区中轧件侧面的速度略高于中心纵断面上的速度。

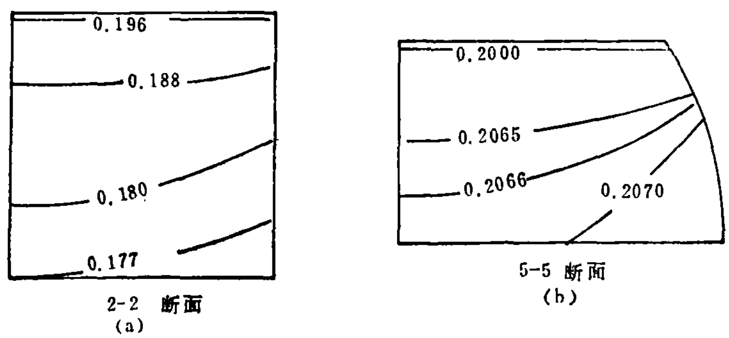


图6 分别位于前滑区与后滑区二断面上轧制方向的速度分布图

Zienkiewicz[16]用粘塑性有限单元法对平面应变条件下轧制过程的计算表明，由于变形的影响，入口前轧件的上下自由表面并不是通常所认为的完全水平，而是在与轧辊接触的附近出现一个小凸起，如图7所示。凸起量约为轧件厚度的1.2%左右。用刚塑性有限单元法计算平面轧制问题时[17]，也提出了在入口前上表面材料流动速度有向上的分量。本计算中上表面1-1和2-2断面中间的节点上，z方向速度分量有不大的正值，这与前文中的计算结果是一致的。但由于计算时间的限制，未能划分更细的单元进行计算，因而没有具体算出这个凸起量的大小及其所在位置。

由实验测得铅条在轧制后断面的形状用虚线表示在图5(d)上。实验是在常温无润滑条件下进行的。虽然曾设法使轧辊表面粗糙些，但仍难于做到完全粘着的摩擦状况。所以

在与轧辊接触的表面上实测宽展比计算宽展稍大些；而在轧件的中部，实测宽展比计算宽展稍小些。

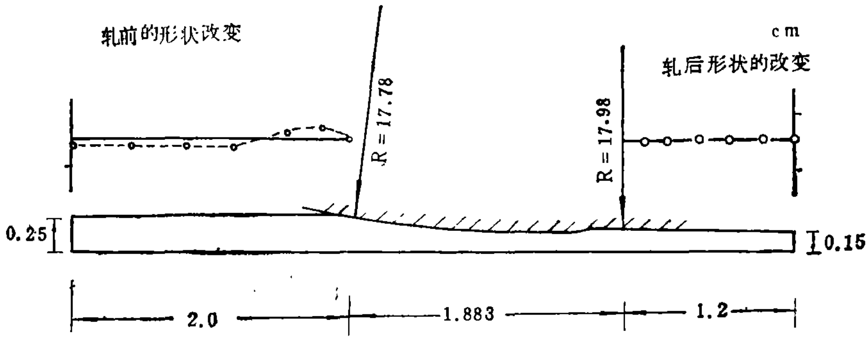


图 7 轧件形状的变化（根据Zienkiewicz）

本文的计算用自行编制的计算程序在M-150计算机上进行的，整个计算时间约为2小时20分。

四、结　　论

采用刚塑性有限单元法对轧制过程三维流动进行分析，可以准确地求得轧件中各点三维流动的速度场以及稳态轧制时轧件的外形。铅条的轧件试验表明，理论计算与实测宽展的结果二者是比较一致的。

本文提出的用刚塑性有限单元法处理这一类稳态流动问题，可以用于拉拔，挤压，轧制等稳态流动的金属塑性加工问题的计算。

参 考 文 献

〔1〕 Alexander, J.M.und Geleji, A.,Arehiv für Eissenhüttenwesen, 38-2 (1967).
〔2〕 Wusatiowski, Z., Iron & Steel, 28-49(1955).
〔3〕 柳本左门,日本机械学会论文集，27—178(1961).
〔4〕 户泽康寿•ほか,塑性と加工，17-180(1976).
〔5〕 五弓勇雄•ほか,塑性と加工,11—108(1970).
〔6〕 Chitkara, N.R., et al, Tran, ASME, J.Basic Eng., 88(1966).
〔7〕 Hill, R., J.Mech.Phys.Solids,11, 305 (1963).
〔8〕 Lahoti, G.D.,et al, Int.J.Mech.Sci., 16(1974).
〔9〕 Oh, S.I., et al, Int.J.Mech.sci,17(1975).
〔10〕 加藤和典•ほか，塑性と加工,21—231(1980).
〔11〕 Lee, C.H., et al, Tran.ASME, Ser.B 95-3(1973).
〔12〕 小林史郎•ほか，塑性と加工，14-153(1973).
〔13〕 林桐，周宝焜，　锻压技术，1981年第5期.

〔14〕 乔端，林桐，北京钢铁学院学报，1982年第2期。
〔15〕 乔端等，刚塑性有限单元法在塑性加工中的应用，北京钢铁学院资料(1982.6)。
〔16〕 Zienkiewicz, O.C., et al, Int.J.Solids Structures, 14(1978).
〔17〕 周宝焜，钱仁根，乔端，轧制问题的有限单元法解，北京市金属学会压力加工学术会议论文 (1981.10)。

The Analysis of Spread in Rolling by the Finite Element Method

Qiao Duan, Lin Tong

Abstract

In this paper, according to the rigid-plastic finite element method we have analized the three dimenssional flow of metal in the rolling by 20 nodals curved hexahedron isoparametric element. The three dimenssional flow velocity fieed of metal in the rolling and the deformed Shape of workpiece in steady-state flow have been obtained. The results got from computation have compared with the experiments.