DOI:10.13374/j.issn1001-053x.1985.04.012

一类变系数线性系统解的稳定性

数学第一教研室　廖福成

摘　要

本文引用向量、矩阵的模，采用纯量Liapunov函数法，得到了变系数线性大系统的零解渐近稳定的几个充分条件，即定理1、2和3，并通过严格的理论证明，对其各自的稳定性参数区域进行了比较。

王慕秋等在文〔1〕及文〔2〕中研究了线性常系数大系统及变系数大系统的稳定性。本文引用向量、矩阵的模，得到比文〔1〕、〔2〕更好的结果。本文要用到Metzler矩阵的一些性质，关于Metzler矩阵的性质，可参看有关文献，例如〔3〕、〔4〕，这里从略。

引理　设$a>0$，$b_i\geqslant 0$，$\alpha_i>0$ $(i=1,\cdots,\gamma)$且满足条件$\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i=1$，则对一切$Z\in$〔0，$\infty$）有

$$-az^2+\sum_{i=1}^{r}b_iz\leqslant-\frac{a}{2}z^2+\sum_{i=1}^{r}\frac{b_i^2}{2a\alpha_i}$$

当$r=1$时，其证明见文〔1〕。对于一般的r，应用$r=1$时的结论有

$$-az^2+\sum_{i=1}^{r}b_iz=\sum_{i=1}^{r}(-\alpha_iaz^2+b_iz)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{r}\left(-\frac{\alpha_ia}{2}z^2+\frac{b_i^2}{2\alpha_ia}\right)=-\frac{a}{2}z^2+\sum_{i=1}^{r}\frac{b_i^2}{2a\alpha_i}$$

引理得证

考虑变系数线性系统

$$\begin{pmatrix}\dot{X}_1\\ \vdots\\ \dot{X}_r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}(t)\cdots A_{1r}(t)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_{r1}(t)\cdots A_{rr}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_r\end{pmatrix}\tag{1}$$

其中$X_i\in R^{n_i}$，$\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n$，$X=(X_1^T,\cdots,X_r^T)^T\in R^n$，$A_{ij}(t)$是$n_i\times n_j$矩阵，它们在$J=(\tau,\infty)$上连续，其中$\tau\in R$或$\tau=-\infty$。

假定

（Ⅰ）对每个$A_{KK}(t)$，存在n_K阶正定对称矩阵C_K使得

$$\lambda\left[A_{KK}^T(t)C_K+C_KA_{KK}(t)\right]\leqslant-1\ (\forall t\in J,\ k=1,\cdots,r)$$

其中$\lambda(\cdot)$表示矩阵的特征值，我们用$\lambda_1^{(K)}$和$\lambda_2^{(K)}$分别表示C_K的最小和最大特征值，于是有

$$\lambda_1^{(K)}||X_K||^2\leqslant X_K^TC_KX_K\leqslant\lambda_2^{(K)}||X_K||^2\tag{2}$$

其中$||X_K||=\sqrt{X_K^TX_K}$为向量的Enclid模。

（Ⅱ）设$b_{Ki}=\min\{\sup\limits_{t\in J}||A_{Ki}^T(t)C_K||,\sup\limits_{t\in J}||C_KA_{Ki}(t)||\}<\infty$ （k，$i=1$，…， r；i≠k)，其中的$||\cdot||$为矩阵的模，对任意矩阵A，定义为$||A||=\sup\limits_{||X||=1}||AX||$。

注 1　可以证明

$$|X_i^T A_{Ki}^T(t) C_K X_K| \leqslant b_{Ki}||X_K|| \, ||X_i|| \tag{3}$$

注 2　如果存在正定对称矩阵$\bar{C}_K$使得

$$\lambda[A_{KK}^T(t)\bar{C}_K+\bar{C}_K A_{KK}(t)] \leqslant -\lambda_K < 0$$

则取$C=\dfrac{1}{\lambda_K}\bar{C}_K$，便可使(Ⅰ)满足。

注 3　不难证明，对任意m x n矩阵A有

$$||A||=\sqrt{\lambda_{max}(A^T A)}$$

定理 1　在假设(Ⅰ)(Ⅱ)之下，如果矩阵

$$D=\begin{pmatrix} -1 & 2b_{12} & \cdots\cdots & 2b_{1r} \\ 2b_{21} & -1 & \cdots\cdots & 2b_{2r} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 2b_{r1} & 2b_{r2} & \cdots\cdots & -1 \end{pmatrix}$$

稳定（即D之特征值皆有负实部），则系统（1）之零解渐近稳定。

证明　对弧立子系统

$$\dot{X}_K=A_{KK}(t)X_K \tag{4}$$

取Liapunov函数$V_K=X_K^T C_K X_K$，则

$$\left.\frac{dV_K}{dt}\right|_{(4)}=X_K^T\left[C_K A_{KK}(t)+A_{KK}^T(t)C_K\right]X_K \leqslant -||X_K||^2$$

所以弧立子系统的零解渐近稳定。V_K沿（1）之轨线求全导数，则有

$$\left.\frac{dV_K}{dt}\right|_{(1)}=X_K^T\left[C_K A_{KK}(t)+A_{KK}^T(t)C_K\right]X_K+2\sum_{\substack{i=1\\ i\neq K}}^{r} X_i^T A_{Ki}^T(t) C_K X_K$$

$$\leqslant -||X_K||^2+2\sum_{\substack{i=1\\ i\neq K}}^{r} b_{Ki}||X_K|| \, ||X_i|| \quad (k=1,\cdots,r) \tag{5}$$

即得到了

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_r \end{pmatrix}_{(1)} \leqslant \begin{pmatrix} ||X_1|| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ||X_r|| \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} ||X_1|| \\ \vdots \\ ||X_r|| \end{pmatrix} \tag{6}$$

（矩阵A⩾0，A⩾B的定义可参看[4]）。

由于D是稳定的Metzler矩阵，所以可找到正对角矩阵$C=\mathrm{diag}(C_1,\cdots,C_r)$使得$D^T C+CD$负定。作二次型

$$V=\sum_{i=1}^{r} C_i V_i=(C_1,\cdots,C_r)\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_r \end{pmatrix}$$

则V在R^n中正定，且从(6)有

$$\frac{dV}{dt}_{(1)} \leqslant (C_1,\cdots,C_r)\begin{pmatrix} ||X_1|| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & ||X_r|| \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} ||X_1|| \\ \vdots \\ ||X_r|| \end{pmatrix}$$

$$=(||X_1||,\cdots,||X_r||)\left[\frac{D^T C+CD}{2}\right]\begin{pmatrix} ||X_1|| \\ \vdots \\ ||X_r|| \end{pmatrix}$$

从D^TC+CD负定知$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)}$负定，由Liapunov定理便知定理成立。证毕。

我们还可以推出以下定理

定理 2 在假设（Ⅰ）（Ⅱ）之下，如果存在一组正数$\alpha_{ij}(i,j=1,\cdots,r;i\neq j)$，满足条件$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r}\alpha_{ij}=1(i=1,\cdots,r)$，使得矩阵

$$\hat{D}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2b_{12}^2}{\alpha_{12}} & \cdots\cdots & \frac{2b_{1r}^2}{\alpha_{1r}} \\ \frac{2b_{21}^2}{\alpha_{21}} & -\frac{1}{2} & \cdots\cdots & \frac{2b_{2r}^2}{\alpha_{2r}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{2b_{r1}^2}{\alpha_{r1}} & \frac{2b_{r2}^2}{\alpha_{r2}} & \cdots\cdots & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

稳定，则系统(1)的零解渐近稳定。

定理 3 在假设（Ⅰ）（Ⅱ）之下，如果存在一组正数$\alpha_{ij}(i,j=1,\cdots,r;i\neq j)$，满足条件$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{r}\alpha_{ij}=1\ (i=1,\cdots,r)$，使得矩阵

$$\tilde{D}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\lambda_2^{(1)}} & \frac{2b_{12}^2}{\alpha_{12}\lambda_1^{(2)}} & \cdots\cdots\cdots & \frac{2b_{1r}^2}{\alpha_{1r}\lambda_1^{(r)}} \\ \frac{2b_{21}^2}{\alpha_{21}\lambda_1^{(1)}} & -\frac{1}{2\lambda_2^{(2)}} & \cdots\cdots\cdots & \frac{2b_{2r}^2}{\alpha_{2r}\lambda_1^{(r)}} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \frac{2b_{r1}^2}{\alpha_{r1}\lambda_1^{(1)}} & \frac{2b_{r2}^2}{\alpha_{r2}\lambda_1^{(2)}} & \cdots\cdots\cdots & -\frac{1}{2\lambda_2^{(r)}} \end{pmatrix}$$

稳定，则系统（1）的零解渐近稳定。

证明 从(5)式，应用引理有

$$\left.\frac{dV_K}{dt}\right|_{(1)}\leqslant-\frac{1}{2}||X_K||^2+\sum_{\substack{j=1\\j\neq K}}^{r}\frac{2b_{Kj}^2}{\alpha_{Kj}}||X_j||^2\ (K=1,\cdots,r)\qquad(7)$$

即

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}V_1\\ \vdots\\ V_r\end{pmatrix}_{(1)}\leqslant\hat{D}\begin{pmatrix}||X_1||^2\\ \vdots\\ ||X_r||^2\end{pmatrix}$$

如$\hat{D}$稳定，则因$\hat{D}$是Metzler矩阵，所以可以取到$\alpha^T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)>0$使得$\alpha^T\hat{D}<0$。作$R^n$中的正定二次型

$$V=\sum_{i=1}^{r}\alpha_iV_i=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)\begin{pmatrix}V_1\\ \vdots\\ V_r\end{pmatrix}$$

则有

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)}=\alpha^T\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}V_1\\ \vdots\\ V_r\end{pmatrix}_{(1)}\leqslant\alpha^T\hat{D}\begin{pmatrix}||X_1||^2\\ \vdots\\ ||X_r||^2\end{pmatrix}<0\quad(当X\neq0)$$

所以(1)之零解渐近稳定，定理2得证。

利用(2)，从(7)可得

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}V_1\\ \vdots\\ V_r\end{pmatrix}_{(1)}\leqslant\tilde{D}\begin{pmatrix}V_1\\ \vdots\\ V_r\end{pmatrix}$$

同上面类似可证定理3成立。

定理2和定理3使得我们可以通过α_{ij}的选取，而决定相当大的一类线性系统解的稳定性。特别，在定理3中取

$$\alpha_{ij}=\frac{n_j}{n-n_i}\quad(i,j=1,\cdots,r;\ i\neq j)$$

时，所得结果已扩大了文〔1〕、〔2〕所给出的参数稳定性区域，这点是容易证明的，进一步有

定理4 如果用U_D、$U_{\hat{D}}$、$U_{\tilde{D}}$分别表示由定理1、2、3所决定的参数稳定性区域，则有

$$U_D=U_{\hat{D}},\quad U_{\hat{D}}\supset U_{\tilde{D}}$$

证明 只须证明两点：(1) $\tilde{D}$稳定$\Rightarrow\hat{D}$稳定$\Rightarrow$D稳定；(2) 如果D稳定，则一定能找到满足定理2中条件的$\alpha_{ij}>0$使得$\hat{D}$稳定。

(1) $\tilde{D}$稳定$\Rightarrow\hat{D}$稳定：注意到$\tilde{D}$、$\hat{D}$都是Metzler矩阵。令$C=\mathrm{diag}(1/\lambda_1^{(1)},\cdots,1/\lambda_1^{(r)})$。则$C>0$，所以$\hat{D}$稳定$\Longleftrightarrow C\hat{D}$稳定。又注意到$C\hat{D}\leqslant\tilde{D}$，所以$\tilde{D}$稳定$\Rightarrow\hat{D}$稳定。

$\hat{D}$稳定$\Rightarrow$D稳定：只须证明存在正对角矩阵C使得D^TC+CD稳定。

因$\hat{D}$稳定，所以可以找到$\alpha^T=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)>0$使得$\alpha^T\hat{D}<0$。取$C=\mathrm{diag}(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$。考虑二次型$f(x)=X^T(CD+D^TC)X$，其中$X\in R^r$，则应用引理有

$$\begin{aligned}f(x)&\leqslant 2\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\left[-|X_i|^2+2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}b_{ij}|X_i||X_j|\right]\\&\leqslant 2\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\left[-\frac{1}{2}|X_i|^2+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\frac{2b_{ij}^2}{\alpha_{ij}}|X_j|^2\right]\\&=2\alpha^T\hat{D}\begin{pmatrix}|X_1|^2\\ \vdots\\ |X_r|^2\end{pmatrix}=2\alpha^T\hat{D}\begin{pmatrix}X_1^2\\ \vdots\\ X_r^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

从$\alpha^T\hat{D}<0$知$f(x)$负定，从而D^TC+CD负定。

(2) 设D稳定，先设D（从而$\hat{D}$）的所有元素$b_{ij}\neq0$，D为稳定的Metzler矩阵，所以存在$\beta^T=(\beta_1,\cdots,\beta_r)>0$，使得$D\beta<0$即

$$-\beta_i+e_i<0\quad(i=1,\cdots,r)\tag{8}$$

其中$e_i=\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}(2b_{ij}\beta_j)\quad(i=1,\cdots,r)$取

$$\alpha_{ij}=\frac{2b_{ij}\beta_j}{e_i}\quad(i,j=1,\cdots,r,\ i\neq j),$$

则$\alpha_{ij}>0$且$\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\alpha_{ij}=1\ (i=1,\cdots,r)$我们断言，对于这样一组$\alpha_{ij}$，$\hat{D}$是稳定的。事实上，取$\gamma^T=(\beta_1^2,\cdots,\beta_r^2)^T$，则$\gamma^T>0$且$\hat{D}\gamma<0$。这是因为$\hat{D}\gamma$的第i个分量为

$$\begin{aligned}(\hat{D}\gamma)_i&=-\frac{1}{2}\beta_i^2+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r}\frac{2b_{ij}^2}{\alpha_{ij}}\beta_j^2=\frac{1}{2}(-\beta_i^2+e_i^2)\\&=\frac{1}{2}(\beta_i+e_i)(-\beta_i+e_i)<0\end{aligned}$$

如果D中有一些b_{ij}为零，则把这些零换为充分小的正数ε，可使所得到的Metzler矩阵D_ε稳定。从这个D_ε出发，依上法选α_{ij}得到稳定的$\hat{D}_\varepsilon$。把D_ε中的ε换为零得到$\hat{D}$，注意到$\hat{D}\leqslant\hat{D}_\varepsilon$，所以$\hat{D}_\varepsilon$稳定$\Rightarrow\hat{D}$稳定，定理4证毕。

定理4给出了由定理1、2和3所确定的稳定性参数区域的比较。定理1显然最便于应用，而且给出最好的稳定性参数区域。

例1 考虑常系数线性系统

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \vdots \\ \dot{X}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \cdots A_{1r} \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{r1} \cdots A_{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix} \tag{9}$$

其中$X_i \in R^{n}_{i}$，设

$$\lambda\left[A^{T}_{ii} + A_{ii}\right] \leqslant -2\lambda_i < 0 \quad (i=1,\cdots,r)$$

应用定理1可知，如果矩阵

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \|A_{12}\| & \cdots\cdots & \|A_{1r}\| \\ \|A_{21}\| & -\lambda_2 & \cdots\cdots & \|A_{2r}\| \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \|A_{r1}\| & \|A_{r2}\| & \cdots\cdots & -\lambda_r \end{pmatrix}$$

稳定，系统(9)之零解便渐近稳定。

例2 考虑系统

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = -a_1(t)X_1 + b_1(t)X_n \\ \dot{X}_2 = -a_2(t)X_2 + b_2(t)X_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{X}_n = -a_n(t)X_n + b_n(t)X_{n-1} \end{cases} \tag{10}$$

设$a_i(t) \geqslant \alpha_i > 0$，$|b_i(t)| \leqslant \beta_i$，$(\beta_i \geqslant 0, i=1,\cdots,n)$，$a_i(t)$，$b_i(t)$均为连续函数。由定理1知如果矩阵

$$B = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & -\alpha_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \beta_n & -\alpha_n \end{pmatrix}$$

稳定，则系统(10)之零解渐近稳定。从Metzler矩阵的性质可证B稳定当且仅当

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\beta_i}{\alpha_i} < 1$$

本文根据研究生毕业论文整理。在此，向指导老师，东北工学院数学系副教授刘溢名、于学贞表示感谢，辽宁大学数学系雷鸣鎔副教授曾对本文提了有益的意见，也向他表示感谢。

参 考 文 献

〔1〕 王慕秋，稳定性参数区域之扩大，数学学报，18(1975)，107—122.

〔2〕 王慕秋、田秀恭，一类变系数系统解的稳定性，应用数学学报，6:4 (1983)，494—504.

〔3〕 D. D. Siljak, Large—Scale Dynamic Systems, Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 1978.

〔4〕 R. J. Plemmons，M—矩阵的特性描述I—非奇异M—矩阵，应用数学与计算数学，2(1981)，48—55.

THE STABILITY OF A TYPE OF LINEAR SYSTEM WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Liao Fucheng

Abstract

In this paper, several sufficiency condions to determine asymptotic stability of a large-scale system with variable coefficients are psented, i. e theorems 1,2 and 3 by using the norm of vector and matrix and scalar Liapunov functions. Then the stability parameter regions of theirs are compared with each other and the proof is given theoretically.