

一个方程求根公式及其推导

王运通

(数力系)

内 容 提 要

本文利用分式线性函数在 x_0 处近似 $f(x)$ 而导出一种求方程 $f(x)=0$ 的根的迭代公式, 它的变形包括Hally方法, 在一定的条件下证明了二阶收敛性。

关键词: 分式线性函数, 逼近, 泰勒展开, 方程的解, 二次收敛性

A Iterative Scheme for the Solution of
Nonlinear Equation

Wang Yuntong

Abstract

Using fractional linear function (also called pseudolinear function) to approximate a function $f(x)$ at a specific point X_0 , a iteration scheme for the solution of equation $f(x) = 0$ is developed the variant of the method includes the well-known Hally method. Under the appropriate condition the quadratic convergence is proved.

Key words: fractional linear function; approximation; the solution of equation, Taylor expansion; quadratic convergence

我们仅讨论一维情形, 即 $f: R^1 \rightarrow R^1$

引理 1

设 $f(x)$ 为 $O(0, \delta)$ ($\delta > 0$) 中的三阶连续可微函数, $f'(0) \neq 0$, 则在 $O(0, \delta)$ 中存在一个分式线性函数: $l(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, 以 $O(x^2)$ 的精确度近似 $f(x)$ 。

证明 设 $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + O(x^2)$,

$x \in O(0, \delta)$, 取 $l(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, 在 0 点展开 $l(x)$:

$$l(x) = \frac{b}{d} + \frac{ad-bc}{d^2} x + \frac{1}{2} \left(-\frac{c}{d} \right) \cdot \frac{ad-bc}{d^2} x^2 + O(x^2)$$

取 $\frac{b}{d} = f(0)$, $\frac{ad-bc}{d^2} = f'(0)$, $-\frac{c}{d} \frac{ad-bc}{d^2} = f''(0)$,

则 $a = \left(f'(0) - \frac{f(0)f''(0)}{f'(0)} \right) d$

$$b = f(0) \cdot d \quad c = -\frac{f''(0)}{f'(0)} d$$

d 为自由项。以下不妨取 $d > 0$, 则由上述系数所构造的分式线性函数即为所求。

引理2

设 $f(x)$ 在 $O(\bar{x}, \delta)$ ($\delta > 0$) 中三阶连续可微, $f'(\bar{x}) \neq 0$, 则存在分式线性函数

$$l(x) = \frac{a(x-\bar{x})+b}{c(x-\bar{x})+d}$$

其中

$$a = \left(f'(\bar{x}) - \frac{f(\bar{x}) \cdot f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} \right) d, \quad b = f(\bar{x}) d, \quad c = -\frac{f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})} d, \quad d > 0$$

任意, 满足,

$$f(x) - l(x) = O(|x-\bar{x}|^2), \quad x \in O(\bar{x}, \delta)$$

证明 由引理 1 即得。

我们知道分式线性函数是一非线性函数, 但它有线性函数的特点, 即它的根可以直接解出。因此用它做为 $f(x) = 0$ 的近似方程以得到近似点是最合适的。由此考虑出发可得到下面的结论:

设 $f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) \neq 0$ 。因 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 附近可以近似地写为

$$l(x) = \frac{a(x-\bar{x})+b}{c(x-\bar{x})+d}$$

其中 a, b, c, d 为上面的形式。

由 $l(x) = 0$ 的根做为 $f(x) = 0$ 的根的近似,

$$\therefore l(x) = 0 \Leftrightarrow a(x-\bar{x}) = -b \quad \therefore x = \bar{x} - \frac{b}{a}$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x}) - \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}}$$

$$\therefore x = x - \frac{f(\bar{x})}{f'(x) - \frac{f(\bar{x})f''(\bar{x})}{f'(\bar{x})}} \text{ 为 } f(x) \text{ 的根的一近似点.}$$

令 $x_0 \in 0(\bar{x}, \delta)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{f'(x_k)}} \quad (1)$$

为一迭代公式。

在一定条件下，可以证明它产生一收敛于 $f(x) = 0$ 的解 $\bar{x}$ 。为此有下列引理：

引理3:

设 $\varphi(x)$ 是 $R \rightarrow R$ 的映射，满足：在 $0(x_0, r)$ ($r > 0$) 内， $|\varphi(x) - \varphi(x')| < \theta |x - x'|$ $0 < \theta < 1$ 且 $\varphi(x)$ 在 $0(x_0, r)$ 上连续并 $|x_0 - \varphi(x_0)| \leq \theta(1 - \theta)r$ 则，以 x_0 为初始点由 $x_n = \varphi(x_{n-1})$ 得到的序列收敛于 $\varphi(x)$ 在 R 上的唯一的不动点。

证明: 见 [2]

引理4:

设 $f(x)$ 在 R 上三阶连续可微，在 $[a, b]$ 上满足如下条件：

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\left| \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)}} \right|_{x = \frac{a+b}{2}} \leq \theta(1 - \theta) \frac{b-a}{2} \quad \text{且}$$

$$|\varphi'(x)| = \left| \left(x - \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)}} \right)' \right| < \theta < 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

则由迭代公式 (1)， $x_0 = \frac{a+b}{2}$ 所产生的点列收敛到 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的零点。

证明: 由定理条件知 $\exists \bar{x} \in [a, b]$ ， $f(\bar{x}) = 0$ 。所以，

$$\varphi(\bar{x}) = \bar{x}。 \text{ 这里 } \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x) - \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)}},$$

故 $\bar{x}$ 为 φ 的不动点。由引理 3 知，由

$$\varphi(x_n) = x_{n+1}, \quad x_0 = \frac{a+b}{2}, \quad \text{所得到的 } \{x_n\} \rightarrow \bar{x} \quad f(\bar{x}) = 0。 \text{ 证毕。}$$

关于收敛速度有，

引理5:

在引理 4 的条件下，由 (1) 所产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 $\bar{x}$ ， $f(\bar{x}) = 0$ ，其收敛速度至少为二阶的。

证明: $\because x_{n+1} - \bar{x} = \varphi(x_n) - \bar{x} = \varphi'(\xi_n)(x_n - \bar{x}) \quad \xi_n \in (x_n, \bar{x})$

$$\therefore |x_{n+1} - \bar{x}| = |\varphi'(\xi_n)| |x_n - \bar{x}|$$

$$= \frac{|f(\xi_n)f'(\xi_n)[f'(\xi_n)f''(\xi_n) + f(\xi_n)f'''(\xi_n)] - 2[f'(\xi_n)]^2[f''(\xi_n)]^2|}{[f'(\xi_n)^2 - f(\xi_n)f''(\xi_n)]^2} \cdot |x_n - \bar{x}|$$

$$\leq \frac{|f'(\eta_n)\{f'(\xi_n)[f'(\xi_n)f''(\xi_n)+f(\xi_n)f'''(\xi_n)]-2f(\xi_n)[f''(f''(\xi_n))]^2\}|}{[f'(\xi)^2-f(\xi_n)f''(\xi_n)]^2}$$

$$\cdot |x_n - \bar{x}|^2$$

(这里 $\eta_n \in (\xi_n, \bar{x})$, $f(\xi_n) = f(\xi_n) - f(\bar{x}) = f'(\eta_n)(\xi_n - \bar{x})$)

$$\text{取 } \beta = S_{\eta_n p} \frac{|f'(\eta_n)\{f'(\xi_n)[f'(\xi_n)f''(\xi_n)+f(\xi_n)+f'''(\xi_n)-2f(\xi_n)[f''(\xi_n)]^2\}|}{[f'(\xi_n)^2-f(\xi_n)f''(\xi_n)]^2}$$

则 β 有界 ($\because f, f', f'', f'''$ 连续, $\eta_n \xi_n \in [a, b]$, $\therefore$ 在 $[a, b]$ 上有界)

$$\text{且 } |x_{n+1} - \bar{x}| \leq \beta |x_n - \bar{x}|^2$$

故算法是二阶收敛的 证毕

我们知道Hally方法的迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - 2 \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}} \quad (2)$$

与这里的迭代公式(1)仅仅在分母第二项上有一常数之差。如果取

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) - \alpha \frac{f(x_n)f''(x_n)}{f'(x_n)}} \quad (3)$$

α 为任一非 0 正常数, 则上式形成一算法类; 当 $\alpha = 1$ 时, 恰好为此文所得之公式(1); $\alpha = 2$ 时, 为Hally公式(2)。又由(3)可知Hally方法具有三阶收敛速率, 可以设想这里的方法(1)也应具有较好的收敛性。特别, 当 $f''(x) < 0$, $x \in [a, b]$, 若 $\bar{x} > \frac{a+b}{2}$, 则 $x_{n+1} > N(x_{n+1})$ 。 $N(x_{n+1})$ 为Newton法所产生的点, 故显然收敛比Newton法快些。因此一般情况下可以获得较好的收敛速度。

参 考 文 献

- [1] Ostrowski, A.M.: Solution of Equations and Systems of Equations, 2nd ed. Academic Press New York, 1966
- [2] 夏道行等编者: 突变函数论与泛函分析(下册), 人民教育出版社, 1979.6. 北京。
- [3] 郑士明, 杭州大学学报, 3 (1982)