

# 最小二乘配点法解壳体弯曲问题

罗 铭 朱孝禄

(机械设计教研室)

## 摘 要

本文用最小二乘配点法分析弹性壳体弯曲问题。采用了加权残数法中的混合法—事先既不满足壳体弯曲定解微分方程式亦不满足边界条件，所选试函数为文献(1)中提到的双重幂级数。对于4边简支圆柱壳，其数值计算解与经典解析解误差不超过1.5%；对于悬臂圆柱壳，取其特例—悬臂板分析时，其结果与解析解误差亦不大。用本法可以编制出壳体弯曲问题的通用计算程序。

**关键词：** 最小二乘配点法，圆柱壳，弯曲，试函数

## The Least-Square Collocation Method Used in Shell-Bending Problems

*Lo Ming    Zhu Xiaolu*

### Abstract

This paper analyses elastic shell-bending problems by means of the least-square collocation method. The mixed method of MWR has been used in which the trial function—a double power series with unknown coefficients can meet the requirements of neither the differential equation of deflection in the interior of shell nor the boundary conditions. The computational results of cylindrical shells with 4 hinged edges show the errors less than 1.5 percent as compared with results of classical solutions. When analysing cantilever plate problems—a special case of cantile-

ver cylindrical shell, the errors are also small. The calculation of all shell-bending problems can be generally programmed by means of the method presented in this paper.

Key words: least-square collocation method, cylindrical shell, bending, trial function.

## 引 言

在第一、二届全国加权残数法学术交流会上,许多作者通过不同的试函数用最小二乘法分析了弹性板壳的弯曲问题。文献[1]以双重幂级数为试函数,使用混合法分析过薄板强度,文献[2][3]在边界配点法中使用了双曲三角函数为试函数,而文献[4]分别采用双调和方程的三类特解序列构造的试函数,探讨了二维问题的解。试函数的选择关系到解的收敛性和精度以及程序编制的繁简程度。本文运用双重幂级数作为试函数,同样运用混合法——事先既不满足壳体弯曲定解微分方程式亦不满足边界条件,求解了壳体的弯曲问题。在解题过程中,通过选择不同的配点方案和待定系数个数,对4边简支圆柱壳和悬臂圆柱壳进行了计算。结果表明,所选用的试函数适宜,它具有很好的收敛性和较高的精度。

用最小二乘法分析板壳问题,其程序编制极为简单,工作量和计算时间很少,且可以编制出任意边界条件和任意载荷作用下的通用计算程序,与有限元等数值方法相比具有很大的优越性。最小二乘法还具有其它计算方法无可比拟的优点,即误差可知,计算精度可以控制。因此,它不失为计算力学中一种很有发展前途的数值方法。

## 1 最小二乘配点法概述<sup>[5]</sup>

研究二维域 $V$ 上的某一类问题,其偏微分方程为:

$$Lu = f \quad \text{在区域} V \text{内} \quad (1)$$

$$B_i u = g_i \quad \text{在边界} S \text{上} (i = 1 \dots n) \quad (2)$$

式中 $u$ 为式(1)、(2)的精确解场函数, $L$ 、 $B_i$ 为微分算子, $f$ 、 $g_i$ 为不含 $u$ 的已知值。方程可以是线性、非线性的边值问题、初值问题或特征值问题。

最小二乘配点法的基本原理是寻找一个近似值 $\tilde{u}$ ,当代入(1)、(2)式时,使得方程残数平方之和为最小。 $\tilde{u}$ 便称为试函数,于是

$$u(a, x) \doteq \tilde{u}(x) \quad (3)$$

式中 $a$ 为待定系数, $x$ 表示区域 $V$ 上的所有独立变量。于是,通过将式(3)代入式(1)、(2)所得的残差即可进行误差估计。方程残数式为

$$R_L(a, x) = L\tilde{u} - f \quad x \in V \quad (4)$$

$$R_{B_i}(a, x) = B_i \tilde{u} - g_i \quad x \in S (i = 1 \dots n) \quad (5)$$

式中 $R_L$ 和 $R_{B_i}$ 分别为区域内部残数和边界残数,最后在整个区域 $V$ 上使加权残数平方和

$$I_a(a) = \sum_{j=1}^k [R_L(a, x_j)]^2 + \sum_{i=1}^n \left( W^2 \sum_{j=k+1}^m [R_{B_i}(a, x_j)]^2 \right) \quad (6)$$

最小, 从而确定出待定系数 $a$ 的最佳值。式(6)中 $W$ 为边界权函数相对于区域权函数之比。

在域 $V$ 内和边界 $S$ 上选择一系列点 $x_j$  ( $j = 1 \dots m$ ), 将其坐标值逐点代入式(4)、(5)中, 于是形成加权残数方程组:

$$\left. \begin{aligned} R_L(a, x_1) &= Lu(a, x_1) - f(x_1) \\ &\vdots \\ R_L(a, x_k) &= Lu(a, x_k) - f(x_k) \\ WR_{B_i}(a, x_{k+1}) &= W [B_i \hat{u}(a, x_{k+1}) - g_i(x_{k+1})] \\ &\vdots \\ WR_{B_i}(a, x_m) &= W [B_i \tilde{u}(a, x_m) - g_i(x_m)] \end{aligned} \right\} (j = 1 \dots n) \quad (7)$$

用矩阵表示为

$$[R] = [c][a] - [b] \quad (8)$$

式中 $[c]$ 为参数矩阵,  $[a]$ 为待定系数列阵(数目为 $p$ ), 且方程个数 $t = k + (m - k) \times n \geq p$ 。

$$\text{显然} \quad I_a = [R]^T [R] \quad (9)$$

为使 $I_a$ 最小, 令

$$\frac{\partial I_a}{\partial a} = 0 \quad (10)$$

据式(10)可以导出

$$[c]^T [c] [a] = [c]^T [b] \quad (11)$$

$$\text{或} \quad [k] [a] = [F] \quad (12)$$

$$\text{式中} \quad [k] = [c]^T [c] \quad (13)$$

$$[F] = [c]^T [b] \quad (14)$$

式(12)为最小乘配点法的基本方程, 按照式(12)编制程序计算, 即可得到待定系数 $a$ , 从而可以获得定解微分方程式在满足边界条件下的近似解 $\tilde{u}$ , 再代入式(4)、(5)计算, 可以得到近似解的误差值。由于矩阵 $[k]$ 的阶数取决于待定系数 $a$ 的个数 $p$ , 而与选点数目 $m$ 无关, 因此在不增加待定系数的情况下, 通过增加选点数 $m$ , 可以提高解的精度。

## 2 圆柱壳体的弯曲问题

设圆柱形开口壳体中间面横向圆的弧半径为 $R$ , 壳体厚度为 $h$ 。中间面任意点 $M$ 的位置用坐标 $\alpha$ 、 $\beta$ 来决定, 其中 $\alpha$ 为沿母线到点 $M$ 的距离成比例的数值,  $\beta$ 为沿横向圆的弧到同一点 $M$ 的距离成比例的数值(图1)。若取半径 $R$ 为比例系数, 则 $\alpha$ 、 $\beta$ 为无因次坐标, 其中 $\beta$ 为圆心角。于是壳体的基本方程为

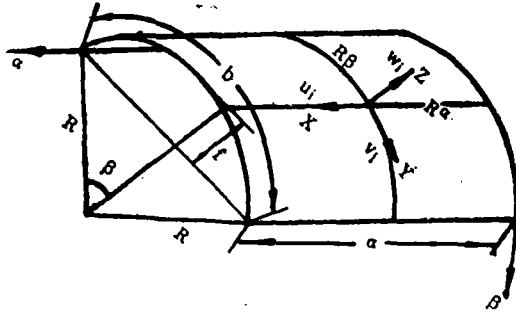


图1 圆柱壳计算模型

Fig.1 Calculating model of a cylindrical shell

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha \partial \beta} + \nu \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= -\frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} X \\
 \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial w}{\partial \beta} &= -\frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} Y \\
 \nu \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + c^2 \nabla^2 \nabla^2 w + w &= \frac{(1-\nu^2)R^2}{Eh} Z
 \end{aligned} \right\} (15)$$

式中  $u, v, w$  表示位移,  $X, Y, Z$  表示表面力, 它们的正方向均示于图1,  $E, \nu$  分别

表示材料的弹性模量和泊松比;  $c^2 = \frac{h^2}{12R^2}$ ,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}$ 。

对于表面仅受有法向载荷的圆柱形开口壳, 式(15)的三个微分方程式通过引入一主无向函数  $\phi = \phi(\alpha, \beta)$ , 很容易归结为一个8阶微分方程

$$\nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{1-\nu^2}{c^2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \alpha^4} = \frac{R^4}{D} Z \quad (16)$$

式中  $D$  为柱型刚度

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (17)$$

函数  $\phi$  称为壳体的基本函数, 通过既在壳面上满足方程(16)又满足边界条件, 可以确定出  $\phi$  值。

引入  $\phi$  后, 壳体的位移和内力可以表示为

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{\partial^3 \phi}{\partial \alpha \partial \beta^2} - \nu \frac{\partial^3 \phi}{\partial \alpha^3} \\
 v &= - \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial \beta^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right] \\
 w &= \nabla^2 \nabla^2 \phi
 \end{aligned} \right\} (18)$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} \\
 N_2 &= \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \alpha^4} \\
 S &= -\frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \alpha^3 \partial \beta} \\
 M_1 &= \frac{D}{R} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 \phi \\
 M_2 &= \frac{D}{R} \left( \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 \phi \\
 M_{12} &= -\frac{D}{R} (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^2 \nabla^2 \phi \\
 Q_1 &= -\frac{D}{R} \frac{\partial}{\partial \alpha} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \phi \\
 Q_2 &= -\frac{D}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \phi
 \end{aligned} \tag{19}$$

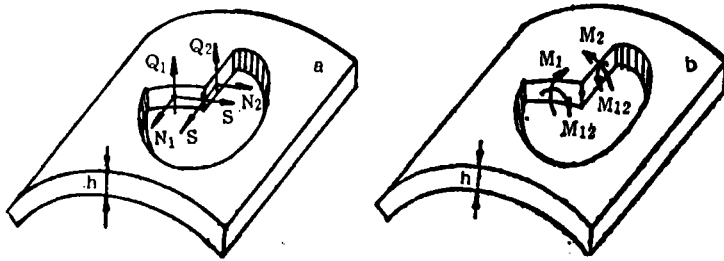


图2 圆柱壳受力状态 (a) 内力图 (b) 内力矩图  
 Fig.2 Forcing states of a cylindrical shell  
 (a) the interior forces (b) the torques and moments

壳体的内力和力矩正方向示于图2 (a)、(b)。

边界条件：根据力学的几何假设导出的壳体的基本计算模型，限制中间曲面线上每一点的独立边界条件数等于4。现分析 $\alpha$ 为常数的边界，对于

(1) 简支边：假设 $\alpha$ 方向没有边缘阻力，则

$$v = 0, w = 0, M_1 = 0, N_1 = 0 \tag{20}$$

(2) 固定边：

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0 \tag{21}$$

(3) 自由边：

$$N_1 = 0, M_1 = 0, S_1 = 0, T_1 = 0 \tag{22}$$

其中 $S_1$ 、 $T_1$ 为克希霍夫意义下的广义横向力和广义剪力

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= S + \frac{M_{12}}{R} \\ T_1 &= Q_1 + \frac{\partial M_{12}}{R \partial \beta} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

自由角点条件：对于悬臂壳体还需增加自由角点上的约束条件，即在两自由角点上的集中反力 $T_0$ 等于0，于是

$$T_0 = 2M_{12} = -\frac{2D(1-\nu)}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (24)$$

### 3 最小二乘配点法解柱壳

如上节所述，圆柱壳体的求解过程关键在于确定基本函数 $\phi$ ，我们选择其试函数为一双重幂级数形式，即

$$\phi = \sum_{m=1}^S \sum_{n=1}^r C_{mn} \alpha^{m-1} \beta^{n-1} \quad (25)$$

式中 $C_{mn}$ 为待定系数， $\alpha$ 、 $\beta$ 为无因次坐标， $m$ 、 $n$ 为正整数。

根据式(25)可以组成内部残数方程式为

$$R_L = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \phi + \frac{1-\nu^2}{C^2} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \alpha^4} - \frac{R^4}{D} Z \quad (26)$$

当 $\alpha$ 为常数的边为简支边时，其边界残数方程式为

$$R_{B1} = v = - \left[ \frac{\partial^3 \phi}{\partial \beta^3} + (2+\nu) \frac{\partial^3 \phi}{\partial \alpha^2 \partial \beta} \right] \quad (27)$$

$$R_{B2} = w = \nabla^2 \nabla^2 \phi \quad (28)$$

$$R_{B3} = M_1 = \frac{D}{R^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \nu \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 \phi \quad (29)$$

$$R_{B4} = N_1 = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^4 \phi}{\partial \alpha^4} \quad (30)$$

如有需要，还可以根据式(18)、(19)及(21)、(22)、(24)组成其它边界条件下的残数方程式。

然后按照第二节中的最小二乘配点法的解题过程，求得系数 $C_{mn}$ ，再根据式(18)、(19)可以求得壳体的位移和内力值。

作为算例，我们求解了四边简支壳和悬臂壳受均布载荷 $q$ 时的弯曲问题。

#### 3.1 四边简支圆柱壳

如图1，设四边简支圆柱壳母线尺寸 $a$ 与横向圆弧尺寸 $b$ 相等，且 $a=b=R$ ，显然无因次坐标 $\alpha$ 、 $\beta$ 的取值范围为(0~1)；又设壳厚为 $h$ ，横向弧矢高为 $f$ ，弹性模量为 $E$ ，

泊松比  $\nu = 0$ 。

于是壳面挠度  $w$  可表示为

$$w = \mu q a^4 / D \quad (31)$$

其中  $\mu$  为系数，亦即所需计算值。

我们在壳面均匀选取63个点，将点的坐标值代入式(26)中，在  $\alpha = 0$  及  $\alpha = 1$  边界上各选6个点，将点的坐标值代入式(27)、(28)、(29)、(30)中，在  $\beta = 0$  及  $\beta = 1$  边界上也各选6个点，同样列出边界条件为  $u = 0, w = 0, M_2 = 0, N_2 = 0$  的残数方程式，于是得到159个方程。现取试函数  $\phi$  的待定系数  $C_{mn}$  为156个，权函数  $W$  取为1<sup>(1)</sup>，计算得到圆柱壳中心的挠度值列于表1。

表1 4边简支圆柱壳中心挠度

Table 1 Deflections at the central points of cylindrical shells with 4 hinged edges

$\frac{f}{h}$	Results of this paper	Results by F.Z. Flasov (6)	Results by S. Timoshenko (6)	Relative errors
0*	0.004065	0.00406	0.00406	0.12%
0.25	0.003935	0.00394	0.00395	0.13%
0.5	0.003591	0.00360	0.00364	0.25%
1.0	0.002655	0.00269	0.00278	1.3%
2.0	0.001330	0.00132	0.00140	0.76%

\*  $\frac{f}{h} = 0$  is the special case of a shell—a plate

表1中列出了根据不同的比值  $f/h$  计算得到的挠度系数  $\mu$ ，从表中可以看出用最小二乘配点法解得的结果与解析解相差很小，证明了本文解题方法的正确性。

本文还选用了不同的配点方案和待定系数个数进行试算，发现其结果均相差不大，因此可以认为选用双重幂级数作为试函数是一种行之有效的办法，其收敛性很好，精度较高。

### 3.2 悬臂圆柱壳

取悬臂圆柱壳几何尺寸及物理量均与四边简支壳相同，只不过泊松比改为  $\nu = 0.3$ ，坐标设定及配点方案也与之相同。

设悬臂圆柱壳  $\alpha = 0$  边为固定边，其它三边均为自由边。

对壳面的63个点按式(26)列出内部残数方程式；于固定边  $\alpha = 0$  上的6个点列出边界条件为  $u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0$  的残数方程式；于自由边  $\alpha = 1$  上的6个点列出边界条件为  $N_1 = 0, M_1 = 0, S_1 = 0, T_1 = 0$  的残数方程式；于自由边  $\beta = 0$  及  $\beta = 1$  上的12个点列出边界条件为  $N_2 = 0, M_2 = 0, S_2 = 0, T_2 = 0$  的残数方程式；于自由角点  $(1.0, 0)$  及  $(1.0, 1.0)$  处按照式(24)列出自由角点条件的残数方程式。这样便得到一个具有161个方程、156个未知数的线性方程组，仍然取

权函数 $W$ 为1。

首先用上述方案求解了壳的特例——板（即 $\frac{f}{h} = 0$ ）的弯曲问题。将计算结果中自由边 $\alpha = 1$ 的挠度值及固定边 $\alpha = 0$ 的弯矩值 $M_1$ 列于表2，并与有限元解及解析解进行了分析比较，发现本文解存在误差，但误差值不大，我们认为这与解题的精度有关。

表2 悬臂板的计算结果

Table 2 Calculating results of cantilever plate

$\beta$	Results of this paper	Results by finite element (s)	Results by Zhangfufan (s)	Relative errors
Deflections at free side $\alpha=1$ ( $qa^4/D$ )				
0	0.132248	0.12708	0.12933	2.2%
0.125	0.133656	0.12788	0.12998	2.8%
0.25	0.134844	0.12851	0.13056	3.3%
0.375	0.135686	0.12892	0.13091	3.6%
0.5	0.136120	0.12905	0.13102	5.8%
Moments at fixed side $\alpha=0$ ( $qa^2$ )				
0	0.477530	0.34571	0	—
0.125	0.477711	0.50399	0.51270	6.8%
0.25	0.496291	0.52760	0.53353	6.98%
0.375	0.519202	0.53058	0.53550	3%
0.5	0.532126	0.53092	0.53560	0.56%

其次求解了一般悬臂壳（即 $\frac{f}{h}$ 为某值）的情况，例如取 $\frac{f}{h}$ 为0.25时，悬臂壳自由边 $\alpha = 1$ 的挠度 $w$ 及固定边 $\alpha = 0$ 的弯矩 $M_1$ 见表3。

表3 悬臂柱壳（ $\frac{f}{h} = 0.25$ ）的计算数

Table 3 Calculating values of cantilever cylindrical shell ( $\frac{f}{h} = 0.25$ )

$\beta$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.0
Deflections at free side ( $qa^4/D$ )	0.11634	0.11726	0.11802	0.11848	0.11862	0.11842	0.11790	0.11709	0.11612
Moments at fixed side ( $qa^2$ )	0.39639	0.41328	0.45374	0.49502	0.51674	0.50625	0.46540	0.41487	0.39492

## 4 结 束 语

(1) 用本法分析均布载荷作用下4边筒支圆柱壳的弯曲问题，其计算结果与解析



解误差不超过1.5%；分析悬臂圆柱壳的特例——悬臂板时，其误差很小。

(2) 用本法可以编制出一般壳体在任意边界条件及任意载荷作用下的弯曲问题的通用计算程序，能够解决工程实用中对一般壳体分析的难题。

(3) 本文的全部计算过程是在 SIGMA 微机 (16位, Intel 8088 CPU) 上使用 FORTRAN 语言完成的，程序简单、灵活，可以实现小机解大题目的要求。

### 参 考 文 献

- [ 1 ] 徐次达、郑瑞芬、施德芳：最小二乘配点法解薄板弯曲问题，上海力学，1卷2期
- [ 2 ] 何广乾、张维岳：用半解析半离散法分析板壳，固体力学学报，1981，№2
- [ 3 ] 徐文焕、陈虬：最小二乘边界配点法解平面问题，土木工程学报，1981，№2
- [ 4 ] 丁浩江、范本隽、叶贵如：最小二乘边界配点法解二维问题探讨，固体力学学报，1983，№4
- [ 5 ] Ernest, D. Eason: *A Review of Least-Square Methods for Solving Partial Differential Equations, International Jou. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, 1976*
- [ 6 ] 瓦·札·符拉索夫：壳体的一般理论，人民教育出版社，1960
- [ 7 ] S·铁摩辛柯，S·沃诺斯基：板壳理论，科学出版社，1977
- [ 8 ] 张福范：弹性薄板，科学出版社，1984