DOI:10.13374/j.issn1001-053x.1992.05.013

第14卷第5期　北京科技大学学报　Vol. 14No. 5
1992年9月　Journal of University of Science and Technology Beijing　Sept. 1992

应用 δ 算子的离散时间控制系统①

尹怡欣*

摘要：研究了 δ 算子和 δ 变换的一些性质以及对离散时间系统的描述方法，并比较了 δ 变换和传统的 s 变换和 z 变换之间的关系。最后介绍了 δ 算子在离散时间系统仿真和控制系统设计中的应用方法。

关键词：δ 算子，离散时间系统，极点配置

Discrete Control System Using δ—operator

*Yin Yixin**

ABSTRACT: Some features of δ—operator and δ—transform, and the description for discrete time system are reserched. The comparisons of δ—operator with s—operator, of δ—operator with z—operator are performed. Finaly, its application in discrete system simulation and contol system designment are disccused.

KEY WORDS: δ—operator, discrete time system, pole—assignment

采用数字电子计算机对系统进行控制或进行仿真、分析以及设计控制系统时，需要把时间变量考虑为离散变量，研究的系统要考虑为离散时间系统。若原来的系统为连续时间系统，则需要将其离散化，转换成离散时间系统。通常采用差分方程来描述离散时间系统，并用 z 变换和前移算子 z 来研究和计算。然而，z 变换和前移算子 z 处理连续时间系统的离散化有两大不足之处：(1) 当连续系统传递函数的分母多项式的阶次比分子多项式的阶数大于1或采样周期 T 比较小时，其相应的 z 脉冲传递函数将增加不稳定零点，即离散系统变为非最小相位系统[1]；(2) 当采样周期 T 趋于零时，z 脉冲传递函数不收敛于原来的连续系统传递函数。这样将使模型参考控制等很多优秀的控制算法不能应用。同时，现代技术的发展要求控制系统的精度越来越高，相应地采样周期 T 越来越小，电子计算机技术的发展又使这一要求成为可能。

① 1991—11—12
* 自动化系 (Department of Automatic Control)

因此，本文的介绍 δ 变换及 δ 算子提供了适应这个要求的离散时间控制系统的新手段。

1 δ算子和δ变换

当采样周期为 T 时，可用一阶差分 $\triangle f(k)=f[(k+1)-f(k)]/T$ 来近似连续时间函数 $f(t)$ 的一阶导数 $\mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t$ 相应的高阶差分为 $\triangle^i f(k)=[\triangle^{(i-1)}f(k+1)-\triangle^{i-1}f(k)]/T$。在此定义 δ 算子为

$$\delta=(z\text{-}1)/T \tag{1}$$

其中，z 为 z 变换中的 z 算子，也可认为是一步前移算子，即 $zf(k)=f(k+1)$。

1.1 用 δ 算子表示的离散时间系统

对于 n 阶 SISO 连续时间系统

$$\begin{cases}x(t)=Fx(t)+gu(t)\\ y(t)=h^Tx(t)\end{cases} \tag{2}$$

以采样周期 T 对输入控制信号 $u(t)$ 进行离散化，并加零阶保持器，可得离散时间系统为

$$\begin{cases}\delta x(k)=Ax(k)+bu(k)\\ y(k)=c^Tx(k)\end{cases} \tag{3}$$

其中，

$$A=\frac{1}{T}(\mathrm{e}^{FT}\text{-}I),\qquad b=\frac{1}{T}\int_0^T\mathrm{e}^{Ft}\mathrm{d}t\cdot g,\quad c=h \tag{4),(5),(6}$$

相应的输入输出表示形式为

$$\delta^n y(k)+a_{n-1}\delta^{n-1}y(k)+\cdots+a_0y(k)=b_{n-1}\delta^{n-1}u(k)+\cdots+b_0u(k) \tag{7}$$

其中，a_i，$i=0$，$1\cdots$，$n-1$ 为矩阵 A 的特征多项式的系数；b_i，$i=0$，1，$\cdots$，$n-1$ 可由下式计算：

$$b_i=c^T(A^{n-1-i}+a_{n-1}A^{n-2-i}+\cdots+a_{i+1}I)b \tag{8}$$

下面的定理说明系统（2）和系统（3）的稳定性是一致的。

定理 1 [2]设矩阵 F 的特征为 Si，矩阵 A 的特征值为 δ_i 则有

$$\delta_i=\frac{1}{T}[\mathrm{e}^{SiT}\text{-}1],\qquad 1\leqslant i\leqslant n \tag{9}$$

上式可变形为 $1+T\delta_i=\mathrm{e}^{SiT}$，故有等价关系

$$|1+T\delta_i|<1\Leftrightarrow Re[Si]<0 \tag{10}$$

所以，矩阵 F 和 A 的稳定性是等价的，从而说明系统（2）和系统（3）的稳定性等价。

1.2 δ 变换及其反变换

1.2.1 δ 变换的定义

如果函数 $f(k)$ 对 $k=0$，1，2，$\cdots$，有定义，对 $k=-1$，-2，$\cdots$，$f(k)=0$，定义

$$F(\delta)=D[f(k)]=\sum_{k=0}^{\infty}f(k)(1+T\delta)^{-k} \tag{11}$$

为函数 f (k) 的 δ 变换。

如果极限

$$\lim_{i\to\infty}\sum_{k=0}^{i}f(k)(1+T\delta)^{-k}$$

是一个有限量，则称函数 f (k) 的 δ 变换收敛。

1. 2. 2 δ变换的性质

利用 (1) 式和 (11) 式可得 δ 变换的如下性质。

性质 1：若 a 和 b 为常数，则

$$D[af(k)+bg(k)]=aD[f(k)]+bD[g(k)] \tag{12}$$

性质 2：l 为正整数

$$D[f(k+l)]=(1+T\delta)^{l}F(\delta)-\sum_{k=0}^{l-1}f(k)(1+T\delta)^{1-k} \tag{13}$$

性质 3：l 为正整数

$$D[f(k-l)]=(1+T\delta)^{-1}F(\delta) \tag{14}$$

性质 4 (初值定理)：若 $\lim\limits_{\delta\to\infty}F$ (δ) 收敛，则

$$f(0)=\lim_{\delta\to a}F(\delta) \tag{15}$$

性质 5 (终值定理)：若 f (∞) 为一定值，则

$$f(\infty)=T\cdot\lim_{\delta\to 0}\delta f(\delta) \tag{16}$$

常用的 δ 变换表由表 1 列出。

表 1 δ变换表

Table 1 Table of δ—transform

$f(t)$	$F(s)$	$F(2)$	$F(\delta)$
单位脉冲	1	1	1
单位阶跃 $1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1+T\delta}{T\delta}$
单位斜坡 t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{(1+T\delta)}{T\delta^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\frac{(1+T\delta)(2+T\delta)}{T\delta^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{1+T\delta}{1+T\delta-e^{-aT}}$
$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{(1-e^{-aT})(1+T\delta)}{T\delta(1+T\delta)-e^{-aT}}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{T(1+T\delta)e^{-aT}}{(1+T\delta-e^{-aT})^2}$
$f(t+T)$	$F(s)e^{Ts}$	$zF(z)-zf(0)$	$(1+T\delta)(F(\delta)-f(0))$
$f(t-T)$	$F(s)e^{-Ts}$	$z^{-1}F(z)$	$f(\delta)/(1+T\delta)$
$\frac{df(t)}{dt}$	$sF(s)-f(0)$	$\frac{z-1}{T}F(z)-\frac{z}{T}f(0)$	$\delta f(\delta)-\frac{1+T\delta}{T}f(0)$

1．2．3　δ反变换

由给定的函数$F(\delta)$求一个函数$f(k)$，并使得$D[f(k)]=F(\delta)$成立，则称下式为$F(\delta)$的δ反变换。

$$f(k)=D^{-1}[F(\delta)] \tag{17}$$

这里仅就$F(\delta)$是有理分式的情况介绍求它的反变换的一种方法：先将$F(\delta)$展开为部分分式，对于一般项$1/(\delta-\delta_i)$，可用

$$D^{-1}[1/(\delta-\delta_i)]=\begin{cases}0 & k=0\\ T(1+T\delta_i)^{k-1} & k\geqslant 1\end{cases} \tag{18}$$

进行δ反变换。

1．3　δ变换和s变换及z变换之间的关系

（1）式已示出δ变换和z变换之间的关系，并由（1）式可得

$$\begin{aligned}\lim_{T\to 0}\delta &=\lim_{T\to 0}\left(\frac{z-1}{T}\right)=\lim_{T\to 0}\frac{1}{T}(e^{sT}-1)\\ &=\lim_{T\to 0}\left(s+\frac{1}{2!}s^2T+\frac{1}{3!}s^3T^2+\cdots\right)=s\end{aligned} \tag{19}$$

即，δ算子实际上是采样周期T充分小时s算子的近似。由图1可以看出δ平面和s平面、z平面的稳定域之间的关系。当采样周期$T\to 0$时，δ平面的稳定域将和s平面的稳定域趋于一致。

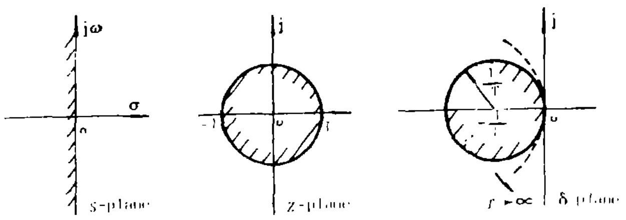

图1　δ平面、s平面、z平面的稳定域之间的关系

Fig. 1　Relations of δ—plane，s—plane and z—plane

1．4　δ脉冲传递函数与s传递函数的关系

连续时间系统（1）的传递函数为

$$G(s)=h^T(sI-F)^{-1}g=R(s)/P(s) \tag{20}$$

其中，

$$P(s)=s^n+P_{n-1}s^{n-1}+\cdots+P_1s+P_0$$

$$= (s - s_1)(s - s_2)\cdots(s - s_n) \tag{21}$$

$$R(s) = r_{n-1}s^{n-1} + r_{n-2}s^{n-2} + \cdots + r_1 s + r_0 \tag{22}$$

r_i 在 $0 \leqslant i \leqslant n-1$ 由下式计算：

$$r_i = h^T(F^{n-i-1} + p_{n-1}F^{n-i-2} + \cdots + p_{i+1}I)g \tag{23}$$

当 $h^Tg = \cdots = h^TF^{n-m-2}g = 0$，$h^TF^{n-m-1}g \neq 0$ 时，$R(s)$ 的阶次为 m。

对应的离散时间系统（2）的 δ 传递函数为

$$G_\delta(\delta) = c^T(\delta I - A)^{-1}b = \frac{B(\delta)}{A(\delta)} \tag{24}$$

$$\text{其中}, A(\delta) = \delta^n + a_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + a_1\delta + a_0 = (\delta - \delta_1)(\delta - \delta_2)\cdots(\delta - \delta_n) \tag{25}$$

$$\delta_i = \frac{1}{T}(e^{S_iT} - 1) \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1 \tag{26}$$

$$B(\delta) = b_{n-1}\delta^{n-1} + b_{n-2}\delta^{n-2} + \cdots + b_1\delta + b_0 \tag{27}$$

b_i，$0 \leqslant i \leqslant n-1$ 由（8）式计算，式中

$$c^T = \frac{1}{T}\int_0^T e^{Ft}dt \cdot g = h^T[1 + \frac{T}{2!}F + \frac{T^2}{3!}F^2 + \cdots]g \tag{28}$$

其中包含了对于所有 k 的一般项 h^TF^kg，因此，$c^Tb \neq 0$。所以，$B(\delta)$ 为 $n-1$ 次多项式。

由式（4）、（5）、（5）、（19）及前述定理可知，当采样周期 $T \to 0$ 时，有

（1）$A \to F$，$b \to g$，且 $c = h$，　（2）$\delta_i \to s_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$，　（3）$A(\delta) \to P(s)$

从而可知应用 $B(\delta) \to R(s)$，即 $B(\delta)$ 的阶次将随 $T \to 0$ 而趋近于 m。可将（24）式写为

$$B(\delta) = B_e(\delta) + B_R(\delta) \tag{29}$$

其中，

$$B_e(\delta) = b_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + b_{m+1}\delta^{m+1}$$

$$B_R(\delta) = b_m\delta^m + \cdots + b_1\delta + b_0 \tag{30}$$

则有：

$$\lim_{T \to 0} b_i = \begin{cases} r_i & 0 \leqslant i \leqslant m \\ 0 & m+1 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases} \tag{31}$$

也就是说，当 T 充分小时，在控制系统的分析和设计中可以无视 $B_e(\delta)$。

例：对于

$$G(s) = \frac{20s + 1}{(s + 0.1)(s + 0.2)(s + 1)} = \frac{20s + 1}{s^3 + 1.3s^2 + 0.32s + 0.02}$$

采样周期选为 $T \approx 2^{-6}$s 时的 $G(\delta)$ 为

$$G(\delta) = \frac{0.155\ 237\delta^2 + 19.813\ 6\delta + 0.989\ 89}{\delta^3 + 1.291\ 83\delta^2 + 0.317\ 232\delta + 0.019\ 797\ 9}$$

其零点分别为-0.049 97和-127.857，即有 $G(\delta)$ 所描述的离散时间系统仍为逆稳定。而此时的 z 脉冲传递函数为

$$G(\delta)=\frac{0.002z^2-0.008z-0.002\ 8}{z^3-2.979\ 9z^2+2.96z-0.98}$$

其零点分别为-1 和 0. 999 2，即成为非最小相位系统。

一般地，具有有理分式形式的 s 传递函数变换为 δ 脉冲传递函数，可由计算机程序来实现。其具体步骤为：

Step1：计算 G (z) 的最小实现系统 (F，g，h)；

Step2：根据设定的采样周期 T，计算矩阵指数 e^{FT}；

Step3：由 (4)、(5)、(6) 式计算 δ 离散时间系统 (A、b、c)；

Step4：用 Faddeev 方法计算 A (δ) 和 B (δ)。

2 控制系统设计

2. 1 δ 脉冲传递函数的时域响应计算

当离散时间系统由 δ 脉冲传递函数给出时，可直接对应 (7) 式所描述的输入输出形式。对于 (7) 式作能观标准型实现

$$\begin{cases}\delta x(k)=Ax(k)+bu(k)\\ y(k)=c^Tx(k)\end{cases}\tag{32}$$

其中，

$$A=\begin{bmatrix}-a_{n-1} & & I & \\ -a_{n-2} & & & \\ \vdots & & & \\ -a_1 & & & \\ -a_0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\tag{33}$$

$$b^T[b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_0]\tag{34}$$

$$c^T=[1,0,\cdots,0]\tag{35}$$

则状态变量和输出量可分别由下面 2 式计算：

$$x(k+1)=x(k)+T[Ax(k)+bu(k)]\tag{36}$$

$$y(k)=x_1(k)\tag{37}$$

2. 2 极点配置控制系统的设计

(7) 式所述的 δ 离散时间系统可表示为

$$A(\delta)y(k)=B_R(\delta)u(k)+\eta(k)\tag{38}$$

其中，

$$\eta(k)=B_t(\delta)u(k)\tag{39}$$

为非模型化项。由于采样周期 T 充分小时 B_t (δ) 的系数将变得很小，所以在控制系统设计中常将 η (k) 忽略不计。

对于 (38) 式所示系统，先给定控制器方程为

$$L(\delta)u(k)=-P(\delta)y(k)+H(\delta)r(k)\tag{40}$$

其中，$r(k)$ 为输入参考信号，$L(\delta)$、$P(\delta)$、$H(\delta)$ 为控制器多项式。

$$\begin{cases} L(\delta) = \delta^{n} + l_{n-1}\delta^{n-1} + \cdots + l_0 \\ P(\delta) = P_{n-1}\delta^{n-1} + P_{n-2} - \delta^{n-2} + \cdots + P_0 \\ H(\delta) = h_{n'}\delta^{n'}z + h_{n'-1}\delta^{n'-1} + \cdots + h_0 \end{cases} \tag{41}$$

由（40）式和系统（38）式构成的闭环系统方程为

$$T(\delta)y(k) = B_R(\delta)H(\delta)r(k) + L(\delta)\eta(k) \tag{42}$$

其中

$$T(\delta) = A(\delta)L(\delta) + B_R(\delta)P(\delta) \tag{43}$$

为 $2n$ 阶多项式，且决定着闭环系统的极点。当事先给定闭环系统的期望极点后，即可确定 $T(\delta)$。然后由（43）解出 $L(\delta)$、$P(\delta)$，$H(\delta)$ 则可根据输入参考信号 $r(k)$ 的形式来确定次数，并由终值定理可知：

$$H(0) = h_0 = T_0/b_0 \tag{44}$$

控制量 $u(k)$ 的计算可由下式来进行

$$u(k) = [-P(\delta)y(k) + H(\delta)r(k)]/L(\delta) \tag{45}$$

在实际控制信号计算中，考虑到（45）式同样构成一新的动态系统，其能观标准型实现为

$$\delta X(k) = A_l X(k) - B_P y(k) - B_h r(k) \tag{46}$$

式中，

$$A_l = \begin{bmatrix} -l_{n-1} & \\ -l_{n-2} & I \\ \vdots & \\ -l_1 & \\ -l_0 & 0\cdots 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} B_P^T &= [P_{n-1}P_{n-2}\cdots P_0] \\ B_h^T &= [0\cdots 0, h_{n'}, \cdots, h_0] \end{aligned} \tag{47}$$

所以，

$$X(k+1) = X(k) + T[A_l X(k) - B_p y(k) + B_h r(k)] \tag{48}$$

则 k 时刻的 $u(k)$ 值为

$$u(k) = [1, 0, \cdots, 0]X(k) = X_1(k) \tag{49}$$

3 结束语

由引入 δ 算子和 δ 变换所得到的新的离散时间系统描述形式，在采样周期 T 充分小时能接近于原连续时间系统，并使其稳定性和最小相位性得到保持。这样就克服了由 z 变换和 z 算子所表示离散系统的不足，从而使连续系统中的一些有效算法以及离散系统中仅适用于最小相位系统的控制方法能够较容易的移植和应用。尤其对于高精度快速系统，δ 算子控制算法有更为优越的特性。今后的主要工作有：(1) 进一步完善关于 δ 算子和 δ 变换的基础理论研究，使之系统化完整化；(2) 研究计算控制信号 $u(k)$ 的快速算法；(3) 将 δ 算子理论推广到系统

辨识及适应用控制的各个领域去；(4) 研究δ算子在多变量系统中的应用。

参考文献

1 Åstrom K. J Automatica，1984，20：31

2 市川邦彦. 第10回“适应制御シンポジウム”，1990，75

3 金井喜美雄. 计测と制御，1990，29 (8)：7

4 Goodwin G C. Automatica，1986，22 (2)：99

5 Goodwin G C. Int J Adaptivc Control and Signai Procssing，1990，14：149