

圆锯片振动模态的准确解

郭兴旺 邹家祥

北京科技大学机械工程学院, 北京 100083

摘要 通过对 Bessel 函数的精确数值计算, 对普通圆锯片在不考虑离心惯性力效应时的频率方程和振型函数分别进行了精确的求解和计算, 得到了锯片振动模态的准确解. 为了检验计算结果的正确性, 又用有限单元法计算了 1 例, 两种方法的计算结果吻合. 另外, 本文还通过计算证明了钢材泊松比的变化对锯片振动模态的影响很小. 其计算结果可供锯片设计时直接查取.

关键词 圆锯片, 振动, 数值计算/模态, 准确解

中图分类号 TH113.1

Exact Solutions of the Vibration Modes of Circular Saw Blades

Guo Xingwang Zou Jiexiang

College of Mechanical Engineering, USTB, Beijing 100083, PRC

ABSTRACT Based on exact numerical calculation of Bessel functions, the frequency equations and the mode functions of usual circular saw blades with the effects of the centrifugal force neglected are exactly solved and calculated respectively, so the exact vibration modes of the saw blades are obtained. In order to examine the correctness of the results, a certain saw blade is analysed by finite element method. The findings by the two methods show a great consistency. Additionally, it is confirmed by computation that the influence of Poisson's ratio of steel on the vibration modes of the saw blades is very small. All the findings in this paper provide a direct use for saw blade design.

KEY WORDS circular saw blade, vibration, numerical computation/mode, exact solutions

普通圆锯片一般可简化成中间固支外边自由的环形弹性薄板. 在一般情况下, 圆形类板的自由振动若采用经典解法, 则在数学上非常复杂, 甚至无法求解. 因此人们贯常采用各种近似方法求取其振动模态. Mote 用 Ritz-Galerkin(R-G) 法计算了锯片的固有频率^[1], 文献[2,3]用有限单元法计算了锯片的固有频率和振型, 文献[4,5]则用试验模态分析法研究了锯片的振动模态. 从已查阅到的大量文献来看, 还极少有人用精确的方法计算锯片的振动模态. 针对这种情况, 作者在用精确解法计算普通圆锯片振动模态方面做了一些工作. 作者曾经推导了普通圆锯片在不考虑离心惯性力效应时的无量纲频率方程和无量纲振型函数^[6]. 本

文将在此基础上对频率方程和振型函数分别进行精确的数值求解和计算,从而获得圆锯片振动模式的准确解.其计算结果将用有限单元法进行检验.另外,还研究了钢材泊松比的变化对锯片振动模式的影响.

1 圆锯片振动模式的准确解

普通圆锯片在不计离心力效应时的无量纲频率方程为:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

其中 $a_1 = J_n(\Phi x)$; $a_2 = Y_n(\Phi x)$;

$a_3 = I_n(\Phi x)$; $a_4 = K_n(\Phi x)$;

$b_1 = nJ_n(\Phi x)/(\Phi x) - J_{n+1}(\Phi x)$;

$b_2 = nY_n(\Phi x)/(\Phi x) - Y_{n+1}(\Phi x)$;

$b_3 = nI_n(\Phi x)/(\Phi x) + I_{n+1}(\Phi x)$;

$b_4 = nK_n(\Phi x)/(\Phi x) - K_{n+1}(\Phi x)$;

$d_1 = J_n(x) - (1-\nu)[n(n-1)J_n(x)/x^2 + J_{n+1}(x)/x]$;

$d_2 = Y_n(x) - (1-\nu)[n(n-1)Y_n(x)/x^2 + Y_{n+1}(x)/x]$;

$d_3 = -\{I_n(x) + (1-\nu)[n(n-1)I_n(x)/x^2 - I_{n+1}(x)/x]\}$;

$d_4 = -\{K_n(x) + (1-\nu)[n(n-1)K_n(x)/x^2 + K_{n+1}(x)/x]\}$;

$e_1 = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) + n^2(1-\nu)/x^2[(n-1)J_n(x) - xJ_{n+1}(x)]$;

$e_2 = nY_n(x) - xY_{n+1}(x) + n^2(1-\nu)/x^2[(n-1)Y_n(x) - xY_{n+1}(x)]$;

$e_3 = -\{nI_{n+1}(x) + xI_{n+1}(x) - n^2(1-\nu)/x^2[(n-1)I_n(x) + xI_{n+1}(x)]\}$;

$e_4 = -\{nK_{n+1}(x) - xK_{n+1}(x) - n^2(1-\nu)/x^2[(n-1)K_n(x) - xK_{n+1}(x)]\}$.

式中 J_n 、 Y_n 、 I_n 和 K_n 为 n 阶 Bessel 函数, φ 为夹径比, ν 为泊松比. 频率方程是关于特征值 x 的方程. 无量纲频率 λ 与特征值 x 的关系是: $\lambda = x^2/[3(1-\nu^2)]^{1/2}$.

固有圆频率 ω 和固有频率 f 与无量纲频率的换算关系分别为:

$$\omega = \lambda h(E/\rho)^{1/2}/a^2; \quad f = \lambda h(E/\rho)^{1/2}/(2\pi a^2) \quad (2)$$

式中 a 为锯片外半径, h 为锯片半厚, E 为杨氏弹性模量, ρ 为密度.

无量纲振型函数为:

$$W(\Phi_r, \theta) = R(\Phi_r) \Theta(\theta)$$

其中: $\Theta(\theta) = \cos n(\theta - \theta_0)$; θ_0 是待定常数, 由初始条件确定.

$$R(\Phi_r) = [J_n(\Phi_r x) \ Y_n(\Phi_r x) \ I_n(\Phi_r x) \ K_n(\Phi_r x)] \{C\}$$

式中: $\Phi_r = r/a$ 为无量纲半径;

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} b_1 \\ d_1 \\ e_1 \end{Bmatrix} \end{Bmatrix}$$

节径位置由方程 $\Theta(\theta)=0$ 确定，即为：

$$\theta_m = (2m - 1)\pi / (2n) + \theta_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots; m = 1, 2, \dots, n)$$

节圆的无量纲半径位置为方程

$$R(\Phi_r) = 0 \tag{3}$$

在区间 $0 < \Phi_r \leq 1$ 上的根。

频率方程(1)和决定节圆位置的方程(3)是含有 Bessel 函数的复杂超越方程，没有解析解。振型因子函数 $R(\Phi_r)$ 是含有 Bessel 函数的复杂超越函数，难以想象其曲线形状。因此，无论是求固有频率还是振型，都只能借助于电子计算机用数值计算方法完成。这时遇到的一个重要问题是如何计算各类 Bessel 函数的值。计算 Bessel 函数通常使用的方法有两种：一是利用 Bessel 函数的级数表达式是利用 Bessel 函数的近似多项式逼近公式^[7]及递推算式。Bessel 函数计算的具体过程比较冗长和复杂，在此不作详细讨论。振动模态的全部计算过程由自编的计算机程序完成。程序操作简便，运算迅速，并具有振型图绘制功能。

取泊松比 $\nu = 0.3$ ，在各种夹径比下普通圆锯片的无量纲频率的计算结果如表 1。夹径比 $\Phi = 0.5$ 的锯片的 2 个典型模态振型如图 1 和图 2 所示，图中曲线 R 是归一化振型因子函数的曲线图， $R_1(\Phi_r) = R(\Phi_r) / R(\Phi_r)_{\max}$ ， $R_1(\Phi_r)$ 取最大值 1 的位置由一竖线标出。数对 (m, n) 表示节圆数为 m 、节径数为 n 的振型模式， Φ_r 表示节圆的无量纲半径位置。

表 1 普通圆锯片的无量纲频率

Table1 Nondimensional frequencies of usual circular saw blades

| 节圆数 m | 节径数 n | 夹径比 | | | | | | | | |
|---------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 |
| 0 | 0 | 2.56 | 3.14 | 4.03 | 5.46 | 7.88 | 12.42 | 22.36 | 51.14 | 208.4 |
| | 1 | 2.11 | 2.91 | 3.97 | 5.52 | 8.04 | 12.67 | 22.70 | 51.54 | 208.9 |
| | 2 | 3.40 | 3.90 | 4.82 | 6.33 | 8.90 | 13.62 | 23.77 | 52.77 | 210.3 |
| | 3 | 7.54 | 7.63 | 8.03 | 9.06 | 11.23 | 15.72 | 25.82 | 54.91 | 212.6 |
| | 4 | 13.22 | 13.23 | 13.36 | 13.91 | 15.49 | 19.41 | 29.09 | 58.05 | 215.9 |
| | 5 | 20.27 | 20.27 | 20.31 | 20.57 | 21.62 | 24.84 | 33.82 | 62.33 | 220.2 |
| 1 | 6 | 28.67 | 28.67 | 28.68 | 28.80 | 29.46 | 31.99 | 40.11 | 67.86 | 225.5 |
| | 0 | 15.29 | 19.54 | 25.79 | 35.44 | 51.46 | 81.05 | 145.2 | 328.9 | 1325 |
| | 1 | 16.75 | 20.90 | 27.01 | 36.54 | 52.48 | 81.98 | 146.0 | 329.7 | 1326 |
| | 2 | 22.36 | 25.39 | 30.83 | 39.91 | 55.52 | 84.78 | 148.6 | 332.2 | 1328 |

2 计算结果的检验

为了验证用精确解法获得的计算结果的正确性，特用有限单元法计算一例，以作对比。

设锯片尺寸为：外径 $d = 1.0\text{m}$ ，厚 $2h = 0.006\text{m}$ ，夹盘直径 $d_1 = 0.5\text{m}$ 。锯片材料为钢：弹性模量 $E = 2.058 \times 10^{11}\text{N/m}^2$ ，泊松比 $\nu = 0.3$ ，密度 $\rho = 7.8 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ 。

根据锯片的轴对称性，可只取半片建立有限元模型。将其划分成 90 个四边形单元，114

个结点, 用 SAP6 计算振动模态. 结果表明, 用精确解法和 SAP6 所得的固有频率和振型都非常一致. 表 2 是用 3 种方法获得的固有频率的对比. 砂型实验结果比理论计算结果偏小, 这主要是由于实验时实际锯片的材料、尺寸及支承情况与理论计算时有所差异而造成的. 另外, 用精确解法算得的固有频率与参考文献[1]上用 R-G 法算得的结果也非常一致. 总之, 本文的精确解法和其计算结果是极其正确的.

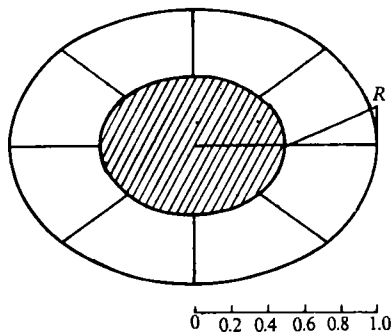


图 1 振型 (0,4), $\lambda=15.49$

Fig.1 The mode shape (0,4), $\lambda=15.49$

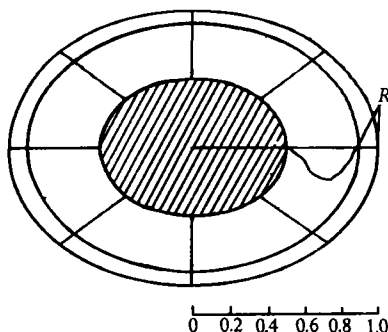


图 2 振型 (1,4), $\lambda=67.82, \Phi_1=0.89$

Fig.2 The mode shape (1,4), $\lambda=67.82, \Phi_1=0.89$

表 2 普通圆锯片 $\Phi 1000-500-6$ 的固有频率 /Hz

Table 2 The natural frequencies of the usual circular saw blade $\Phi 1000-500-6$ /Hz

| | | | | | | | | | | |
|---------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 节圆数 m | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 节径数 n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 0 |
| 准确解法 | 77.3 | 78.9 | 87.3 | 110.2 | 152.0 | 212.1 | 289.0 | 381.1 | 487.5 | 504.8 |
| SAP6 法 | 76.0 | 77.6 | 86.1 | 108.8 | 149.8 | 208.4 | 282.7 | 370.7 | 470.8 | 475.1 |
| 砂型实验 | - | - | 67 | 87 | 129 | 184 | 259 | 347 | 447 | - |

3 泊松比对振动模态的影响

无量纲频率和振型都与泊松比有关, 各种钢材的泊松比有一定的差异, 一般为 $\nu=0.24 \sim 0.30$. 前面的模态计算中均取 $\nu=0.3$, 现再取 $\nu=0.24$ 计算夹径比 $\Phi=0.5$ 的锯片的振动模态. 结果表明: $\nu=0.24$ 时的无量纲频率和振型与 $\nu=0.3$ 时的相差极小. 其中, 无量纲频率的对比见表 3. 夹径比和泊松比取其它值时的进一步计算得出了同样的结论. 因此, $\nu=0.3$ 时的无量纲频率和振型的计算结果可以作为钢质普通圆锯片的通用数据.

4 讨论

本文从严格的振型函数和频率方程出发求取锯片的振动模态, 是属于经典解法的范畴.

表3 当 $\Phi=0.5$, $\nu=0.24$ 和 0.3 时的无量纲频率Table3 Nondimensional frequencies for the case: $\Phi=0.5$, $\nu=0.24$ and 0.3

| 节圆数 m | 节径数 n | $\nu=0.24$ | $\nu=0.3$ | 节圆数 m | 节径数 n | $\nu=0.24$ | $\nu=0.3$ |
|---------|---------|------------|-----------|---------|---------|------------|-----------|
| 0 | 0 | 7.67 | 7.88 | 1 | 0 | 50.41 | 50.46 |
| 0 | 2 | 8.85 | 8.90 | 1 | 2 | 54.53 | 55.52 |
| 0 | 4 | 15.62 | 15.49 | 1 | 4 | 66.89 | 67.82 |

与各种近似法相比, 没有对振型函数作任何预先的假定, 因而求得的解是准确解. 其精确度主要取决于 Bessel 函数的计算精度. 本文计算结果的正确性已被其它方法所证实. 作者认为本文的计算精度高于任何近似法.

本文不计锯片的离心力. 当考虑离心力时, 由于离心力对锯片的张紧作用, 各阶固有频率将有所提高. 因此, 本文所求得各阶固有频率是旋转锯片各阶固有频率的下限值.

5 结论

(1) 当 $\Phi=0.1 \sim 0.35$ 时, 基频对应的振型模式是 $(0,1)$; 当 $\Phi=0.4 \sim 0.9$ 时, 基频对应的振型模式是 $(0,0)$.

(2) 随着夹径比的增加, 各阶频率单调增大. 当夹径比和夹径数不变时, 随着夹圆数的增加, 相应的频率迅速增大.

(3) 除同时满足 $\Phi < 0.4$, $m=0$, $n \leq 1$ 外, 在其他情况下, 当夹径比和夹圆数不变时, 随着夹径数的增加, 对应的频率单调增大.

(4) 钢材泊松比的变化对振动模态的影响极小, 可以忽略不计.

(5) 表 1 可用于确定任何钢种、任何尺寸普通圆锯片的固有频率.

参 考 文 献

- 1 Mote C D Jr. Free Vibration of Initially Stressed Circular Disks. J Eng Industry, 1965, 87: 258
- 2 熊华. 金属热切圆锯片动态特性的研究: [硕士学位论文]. 北京: 北京科技大学, 1988
- 3 彭新根. 超声锯的可行性研究: [硕士学位论文]. 北京: 北京科技大学, 1989
- 4 吴宇东. 金属圆锯片模态分析及动态特性灵敏度分析: [硕士学位论文]. 北京: 北京科技大学, 1989
- 5 张纪锁, 王太勇, 张策. 各种结构金属圆锯片振型的试验分析. 噪声与振动控制, 1988(5): 7
- 6 郭兴旺, 邹家祥. 圆锯片振动模态的分析. 北京科技大学学报, 1993, 15(6): 624
- 7 Hitchcock A J M. Mathematical Tables and Aids to Computation, 1957, 11: 86