

具有重特征值的阻尼线性系统振动

黄汉舟¹⁾ 林 鹤²⁾

1) 柳州钢铁厂, 柳州 2) 北京科技大学机械工程学院, 北京 100083

摘要 本文在复模态理论基础上引入系统传递函数矩阵及其留数矩阵的概念, 推证了传递函数矩阵展式, 通过展式导出系统振动响应的实数表达式可用于计算具有重特征值的阻尼线性系统振动响应, 从而解决了涉及重特征值的振动求解问题. 文中对特征值、特征向量及留数矩阵做了探讨, 并给出了算例.

关键词 振动, 重特征值, 留数矩阵, Laplace 变换

中图分类号 O321

Study on Vibration of Damped Linear Systems with Multiple Eigenvalues

Huang Hanzhou¹⁾ Lin He²⁾

1) Liu Zhou Iron and steel works 2) Mechanical Engineering College, USTB, Beijing 100083, PRC

ABSTRACT In this paper, the transfer function method in complex modal theory has been studied. The transfer function matrix and its residual matrices of a damped linear system are introduced. The expansion formula of the transfer function matrix is derived and proved, with which the real expressions are developed for vibration response of a damped linear system with multiple degrees of freedom. The expressions presented in the paper can be used to compute the vibration response of a damped linear system in which one or more multiple eigenvalues may exist, so the problem dealing with multiple eigenvalues is solved about the solution of the vibration response of a damped linear system. Finally one example is shown.

KEY WORDS vibration, multiple eigenvalues, residual matrix, Laplace transform

工程中的许多阻尼线性系统微分方程在实模态空间中不能解耦. 在这种情况下, 实模态理论不再适用. 为了解决这类系统的振动响应求解问题, 近十几年来复模态理论得到迅速的发展. 用复模态理论求解阻尼线性多自由度系统振动响应问题的方法主要有状态空间法^[4~6]、传递函数法^[8,9]和摄动法^[3], 也有通过建立一种新的正交关系, 然后把响应按复特征向量展开求解的^[7].

本文针对具有重特征值的阻尼线性多自由度系统振动问题进行了研究, 导出了可处理重特征值问题的实用分析方法.

1 系统特征值问题

设阻尼线性 n 自由度系统振动微分方程矩阵形式为:

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} + [C]\{\dot{X}(t)\} + [K]\{X(t)\} = \{g(t)\} \quad (1)$$

$$\text{初条件: } \{X(t)\}_{t=0} = \{X_0\}, \quad \{\dot{X}(t)\}_{t=0} = \{\dot{X}_0\}$$

式中 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[K]$ 分别为系统的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵, 它们均为对称矩阵; 且 $[M]$ 正定, $[C]$ 、 $[K]$ 正定或半正定; $\{X(t)\}$ 、 $\{\dot{X}(t)\}$ 、 $\{\ddot{X}(t)\}$ 分别为系统对应于 n 个自由度的广义坐标位移、速度和加速度列向量; $\{g(t)\}$ 为外激励列向量。

方程式 (1) 对应的齐次方程:

$$[M]\{\ddot{X}(t)\} + [C]\{\dot{X}(t)\} + [K]\{X(t)\} = \{0\} \quad (2)$$

将方程式 (2) 的解 $\{X(t)\} = \{\xi\}e^{st}$ 代入得:

$$[D(s)]\{\xi\} = \{0\} \quad (3)$$

式中, $[D(s)] = s^2[M] + s[C] + [K]$.

方程式 (3) 关于 $\{\xi\}$ 有非零解的充要条件为系数行列式等于零, 即:

$$\det[D(s)] = 0 \quad (4)$$

方程式 (4) 称为系统的特征方程, 其左边为 s 的 $2n$ 次实系数多项式. 特征方程在复数域内有 $2n$ 个根 (重根按重数计算)^[10], 这些根称为系统的特征值. 根次数大于 1 的特征值称为重特征值.

设特征方程有 z 个相异根 $s_1, s_2, \dots, s_z$, 重数分别为 $k_1, k_2, \dots, k_z$, 则特征方程 (4) 可表示为:

$$\det[M] \prod_{j=1}^z (s - s_j)^{k_j} = 0 \quad (5)$$

其中, $k_1 + k_2 + \dots + k_z = 2n$.

2 传递函数矩阵的建立和展开

对方程 (1) 两边作 Laplace 变换, 并设 $[D(s)]$ 之逆 $[D(s)]^{-1}$ 存在, 得:

$$\{X(s)\} = [D(s)]^{-1}(\{Q(s)\} + (s[M] + [C])\{X_0\} + [M]\{\dot{X}_0\}) \quad (6)$$

方程 (6) 反映了广义坐标位移响应的 Laplace 变换与激励函数的 Laplace 变换的关系. 当外激励和初始条件一定时, 系统广义坐标在 s 域中响应的形态取决于矩阵 $[D(s)]^{-1}$. 称 $[D(s)]^{-1}$ 为系统的传递函数矩阵.

考察 $[D(s)]^{-1}$ 中的第 p 行第 q 列元素 $D_{pq}(s)^*$. 为叙述方便, 记 $\text{adj}[D(s)]$ 中对应元素为 $B_{pq}(s)$, 根据逆矩阵的定义, 有:

$$D_{pq}(s) = \frac{B_{pq}(s)}{\det[D(s)]} \quad (7)$$

上式右边分子、分母均为 s 的多项式, 次数分别为 $2(n-1)$ 和 $2n$. 根据 Heaviside 展开定理, 函数 $D_{pq}(s)$ 可按它的全部极点展开为简单分式之和. 比较式 (4) 和式 (7) 知, 函数

* 从定义上看 $B_{pq}(s)$ 和 $D_{pq}(s)$ 中是带参数 s 的行列式, 展开后为 s 的多项式, 为了讨论方便, 下文有时称它们为函数, 有时称它们为行列式.

$D_{pq}(s)$ 的分母恰好是特征方程左边表达式. 可见, $D_{pq}(s)$ 的极点与系统的特征值一一对应. 因此, $D_{pq}(s)$ 按极点展开等价于按系统特征值展开, 亦即 $D_{pq}(s)$ 可按系统全部相异特征值展开为简单分式之和.

用式 (5) 左边代替式 (7) 右边分母, 根据 Heaviside 展开定理将上式右边展开, 得:

$$D_{pq}(s) = \sum_{j=1}^z \left(\frac{a_{pq}^{j1}}{s-s_j} + \frac{a_{pq}^{j2}}{(s-s_j)^2} + \cdots + \frac{a_{pq}^{jk_j}}{(s-s_j)^{k_j}} \right) \quad (8)$$

式中, $a_{pq}^{j1}, a_{pq}^{j2}, \cdots, a_{pq}^{jk_j}$ 均为待定系数, 应用高等数学不难推证:

$$a_{pq}^{jk_j} = 0; a_{pq}^{jk_j-1} = 0; a_{pq}^{jk_j-2} = 0; \cdots; a_{pq}^{j2} = 0; a_{pq}^{j1} = \frac{B_{pq}(s_j)}{(k_j-1)! \det[M] \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^z (s_j - s_i)^{k_i}}$$

因此式 (8) 可简化为:

$$D_{pq} = \sum_{j=1}^z \frac{a_{pq}^j}{s-s_j} \quad (9)$$

$$\text{式中, } a_{pq}^j = \frac{B_{pq}^{(k_j-1)}(s_j)}{(k_j-1)! \det[M] \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^z (s_j - s_i)^{k_i}}.$$

从复变函数论的角度看, a_{pq}^j 的表达式恰好为函数 $D_{pq}(s)$ 在极点 s_j 处留数表达式. 故式 (9) 中待定系数 a_{pq}^j 等于 $D_{pq}(s)$ 在 s_j 处的留数, 即:

$$a_{pq}^j = \text{Res}[D_{pq}(s), s_j] \quad (10)$$

式 (9) 和式 (10) 表明, 如果系统有 z 个相异特征值, 则传递函数矩阵任一元素可按这 z 个相异特征值展开为 z 个简单分式之和, 每个简单分式的分子由该元素对应特征值处的留数表示.

既然传递函数矩阵任一元素均可按系统全部相异特征值展开为简单分式之和, 传递函数矩阵本身亦可按系统全部相异特征值展开为简单分式之和, 即:

$$[D(s)]^{-1} = \sum_{j=1}^z \frac{[A_j]}{s-s_j} \quad (11)$$

式中 $[A_j]$ 为 $[D(s)]^{-1}$ 在 s_j 处的留数矩阵, 其任一元素由式 (10) 表示.

3 系统响应在时域中的实数表达式

把式 (11) 代入式 (6), 得:

$$\{X(s)\} = \sum_{j=1}^z \frac{[A_j]}{s-s_j} \{Q(s)\} + \sum_{j=1}^z \frac{[A_j]}{s-s_j} ([M]\{\dot{X}_0\} + [C]\{X_0\}) + \sum_{j=1}^z \frac{s_j[A_j]}{s-s_j} [M]\{X_0\} + \sum_{j=1}^z [A_j][M]\{X_0\} \quad (12)$$

从形式上看, 由于 $\sum_{j=1}^z [A_j][M]\{X_0\}$ 的存在, 对式 (12) 两边作 Laplace 逆变换将会出现 δ 函数项. 这意味着由于系统非零初位移的存在, 响应中含有脉冲成分, 从物理意义上是难以想象的. 实际上, 用复变函数论不难证明^[12], $\sum_{j=1}^z [A_j]$ 为零矩阵. 因此, 式 (12) 可表为:

$$\{X(s)\} = \sum_{j=1}^z \frac{[A_j]}{s-s_j} \{Q(s)\} + \sum_{j=1}^z \frac{[A_j]}{s-s_j} ([M]\{\dot{X}_0\} + [C]\{X_0\}) + \sum_{j=1}^z \frac{s_j[A_j]}{s-s_j} [M]\{X_0\} \quad (13)$$

对式 (13) 两边作 Laplace 逆变换便可得到响应在时间域中的复数表达式。

由于复特征值共轭成对出现, 设系统有 m 对相异复特征值 $s_1, \bar{s}_1, s_2, \bar{s}_2, \dots, s_m, \bar{s}_m$ 和 u 个相异实特征值 $r_1, r_2, \dots, r_u$, 并记作 $s_j = -\lambda_j + i\omega_j$, $r_l = -\alpha_l$ ($j=1, 2, \dots, m; l=1, 2, \dots, u$), 则系统对外激励响应和初条件响应在时间域中的实数表达式分别如式 (14) 和式 (15) 所示 (推导过程从略):

$$\begin{aligned} \{X(t)\}_r = & 2 \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}[A_j] \int_0^t e^{-\lambda_j(t-\tau)} \cos \omega_j(t-\tau) \{g(\tau)\} d\tau - 2 \sum_{j=1}^m \operatorname{Im}[A_j] \int_0^t e^{-\lambda_j(t-\tau)} \sin \omega_j(t-\tau) \{g(\tau)\} d\tau \\ & + \sum_{l=1}^u [B_l] \int_0^t e^{-\alpha_l(t-\tau)} \{g(\tau)\} d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

式中, $[A_j]$ 、 $[B_l]$ 分别为系统传递函数矩阵在极点 s_j 、 r_l 处的留数矩阵 ($j=1, 2, \dots, m; l=1, 2, \dots, u$)。

$$\begin{aligned} \{X(t)\}_m = & 2 \sum_{j=1}^m \operatorname{Re}[A_j] ((\{\dot{y}_0\} - \lambda_j \{y_0\}) \cos \omega_j t - \omega_j \{y_0\} \sin \omega_j t) e^{-\lambda_j t} \\ & - 2 \sum_{j=1}^m \operatorname{Im}[A_j] (\omega_j \{y_0\} \cos \omega_j t + (\{\dot{y}_0\} - \lambda_j \{y_0\}) \sin \omega_j t) e^{-\lambda_j t} \\ & + \sum_{l=1}^u [B_l] ((\{\dot{y}_0\} - \alpha_l \{y_0\}) e^{-\alpha_l t} \end{aligned} \quad (15)$$

式中, $\{y_0\} = [M]\{X_0\}$, $\{\dot{y}_0\} = [C]\{X_0\} + [M]\{\dot{X}_0\}$ 。

式 (14) 和式 (15) 等号右边之代数和即为系统对外激励和初条件的总响应。

当系统无重特征值时, 其特征值、特征向量反映了系统本征运动的基本性质^[6,8,11], 可以证明^[9,12], 对应于任意阶特征值 s_j 的留数矩阵 $[A_j]$ 的任一系列都与对应阶特征向量之一线性相关。所以, 当系统无重特征值时, 任意阶留数矩阵的列与对应阶特征向量均描述了系统对应阶本征振动的振型。

从式 (15) 可以看到, 系统任意阶特征值的负实部和虚部分别反映系统自由振动对应阶振动成分的衰减率和振动频率, 与特征值是否重特征值无关。

由前面系统特征值问题的讨论知道, 对应于重数为 k_j 的特征值, 当 $k_j \geq 2$ 时, 线性无关特征向量不是唯一的。而对于确定的系统在确定的初条件下任意阶振动响应是唯一的。因此, 在系统具有重特征值的情况下, 对应于重特征值的特征向量不能确切描述系统自由振动对应阶振动成分的振型。

4 算例

一个简单的有粘性阻尼的扭振模型如图 1 所示。物理参数为 $J_1 = J_3 = J_4 = J$; $J_2 = 2J$; $k_1 = k_2 = k_3 = k$; $C_{11} = C_{33} = C_{44} = C$; $C_{12} = 2C$ 。分别讨论在初速度 $\dot{\theta} = 1/J_i$, ($i=1, 2, 3, 4$) 条件下系统的扭振响应。

系统扭振微分方程矩阵形式为:

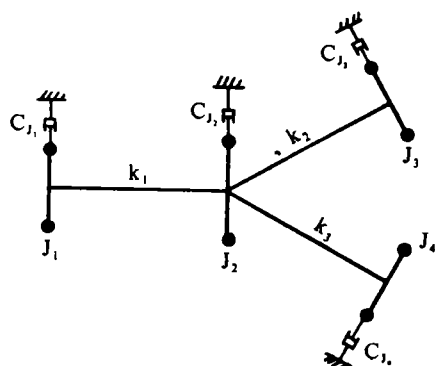


图1 扭摆系统模型图

Fig.1 Model of torsional vibration system

$$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & 3k & -k & -k \\ 0 & -k & k & 0 \\ 0 & -k & 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

用本文叙述的方法求解如下:

1) 系统特征值问题

记 $\omega_1 = \sqrt{k/J}$, $\omega_2 = \sqrt{2.5k/J}$, $n = C/2J$, $\omega'_1 = \sqrt{\omega_1^2 - n^2}$, $\omega'_2 = \sqrt{\omega_2^2 - n^2}$; 按式 (4) 计算得实特征值 $r_1 = 0$ 和 $r_2 = -2n$, 具有正虚部的复特征值为 $s_1 = -n + i\omega'_1$ (重数为 2) 和 $s_2 = -n + i\omega'_2$ (重数为 1); 按式 (3) 计算得对应于 r_1 和 r_2 的特征向量均为 $\{\xi_0\} = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}^T$, 对应于 s_2 的特征向量为 $\{\xi_2\} = \{1 \ -1.5 \ 1 \ 1\}^T$, 对应于重数为 2 的 s_1 线性无关特征向量有 2 个, 如 $\{\xi_{11}\} = \{-1 \ 0 \ 1 \ 0\}^T$ 和 $\{\xi_{12}\} = \{0 \ 0 \ -1 \ 1\}^T$.

2) 系统各阶留数矩阵

记对应于 s_1 和 s_2 的留数矩阵分别为 $[A_1]$ 和 $[A_2]$, 对应于 r_1 和 r_2 的留数矩阵分别为 $[B_1]$ 和 $[B_2]$, 按式 (10) 计算得:

$$[A_1] = -\frac{i}{6J\omega'_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad [A_2] = -\frac{i}{30J\omega'_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 2 \\ -3 & 4.5 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$[B_1] = \frac{1}{10Jn} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad [B_2] = -\frac{1}{10Jn} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

在 $[A_1]$ 中第 2 列为零列, 各非零列两两线性无关, 但都可用 $\{\xi_{11}\}$ 和 $\{\xi_{12}\}$ 线性表示; 在 $[A_2]$ 中各列均与 $\{\xi_2\}$ 线性相关; 在 $[B_1]$ 和 $[B_2]$ 中, 各列均与 $\{\xi_0\}$ 线性相关。

3) 系统对初速度的响应

下面我们考察在不同惯量件上存在初速度条件下系统扭振响应。按 (15) 式, 只取扭转成分 $\{\theta\}^v$, 记在 $\{\dot{\theta}_0\}$ 中仅 $\dot{\theta}_{0i} = 1/J_i$, 其余初速度均为零时系统扭振响应为 $\{\theta\}_{(i)}^v$, $i=1,2,3,4$, 则得:

$$\left. \begin{aligned} \{\theta\}_{(1)}^v &= -2\{A_1\}_1 e^{-n_1 t} \sin \omega'_1 t - 2\{A_2\}_1 e^{-n_1 t} \sin \omega'_2 t \\ \{\theta\}_{(2)}^v &= -2\{A_1\}_2 e^{-n_1 t} \sin \omega'_1 t - 2\{A_2\}_2 e^{-n_1 t} \sin \omega'_2 t \\ \{\theta\}_{(3)}^v &= -2\{A_1\}_3 e^{-n_1 t} \sin \omega'_1 t - 2\{A_2\}_3 e^{-n_1 t} \sin \omega'_2 t \\ \{\theta\}_{(4)}^v &= -2\{A_1\}_4 e^{-n_1 t} \sin \omega'_1 t - 2\{A_2\}_4 e^{-n_1 t} \sin \omega'_2 t \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中 $\{A_i\}_j$ 表示矩阵 $\text{Im}[A_i]$ 中的第 j 列, $i=1,2$; $j=1,2,3,4$ 。

一阶、二阶复特征值 s_1 、 s_2 的实部和虚部分别反映了对应阶振动的振幅衰减率和振动频率, 与特征值是否重特征值无关。

对应于 s_1 的留数矩阵 $[A_1]$ 第二列为零列, 因而 J_2 上的初速度作用没有激起系统第一阶振动, J_1 、 J_3 、 J_4 上的初速度激起的该阶振动 θ_2 恒为零。 $[A_1]$ 的各非零列两两互不相关, 对应各惯量件上初速度激起的第一阶振动振型两两互异。对应于 s_2 的留数矩阵 $[A_2]$ 各列线性相关, 因此各惯量件上初速度激起的第一阶振动振型均相同。

对应于非重特征值 s_2 的特征向量描述了系统第二阶振动振型, 与初速度作用位置无关。对应于重特征值 s_1 的特征向量 $\{\xi_{11}\}$ 和 $\{\xi_{12}\}$ 各自与 $[A_1]$ 中任意非零列线性无关, 因此二者均没有描述第一阶振动振型。但它们的线性组合可以与 $[A_1]$ 中任意非零列线性相关, 因而各惯量件上初速度激起的第一阶振动振型均可由 $\{\xi_{11}\}$ 和 $\{\xi_{12}\}$ 线性组合表示。

本例中系统阻尼为比例阻尼, 系统自由振动响应可用固有模态理论求得与式 (16) 完全相同的结果。在用固有模态理论求响应时, 对应于重特征值出现两个该阶主振动, 这是求解方法上人为地引进的。实际上两个该阶主振动频率和衰减率均为相同, 必可合成为一个同频率、同衰减率的运动量。另一方面, 确定的系统在确定的激励下任一阶振动振型只能有一个, 其形态取决于各激励的大小和作用位置。在系统有重特征值情形下, 用特征向量来描述系统自由振动振型是不方便的, 用留数矩阵的列才具有确定的意义。有关本文理论在轧钢机扭振研究中的应用, 请看笔者的学位论文^[12]。

5 结论

(1) 阻尼线性多自由度系统不管是否具有重特征值都可用传递函数法按本文叙述的步骤进行振动响应求解。

(2) 欠阻尼系统任意阶特征值的实部和虚部分别反映对应阶振动成分的衰减率和振动频率, 与特征值是否重特征值无关。

(3) 对应于非重特征值的线性无关特征向量是唯一的, 对应阶留数矩阵各列均与它线性相关。特征向量和留数矩阵的列均描述了系统对应阶振动振型。

(4) 对应于重特征值的线性无关特征向量不是唯一的, 而对应阶留数矩阵是唯一确定的, 它的每一列都与对应阶某个特征向量线性相关。留数矩阵的列描述了对应列号的广义坐

(下转 85 页)

4 理论模型的实验考核

首先对曾实测了内应力的两个试样, 再计算其内应力。图2中两条光滑曲线所示就是取 $T_0=0.1$ 时的计算结果。两者的分布规律十分吻合。此外还进行了大量的实测试样考核, 都给出了和实测板形状一致的结果。

5 结语

(1) 采用小孔松弛法测量了冷轧带钢离线状态下的内应力分布值。

(2) 在实验基础上建立了新的内应力计算模型, 模型简单, 精度高, 完全可以用于在线闭环板形控制。

参 考 文 献

- 1 张清东. 冷轧带钢在线板形的变形分析: [硕士论文]. 北京科技大学, 1989
- 2 Nawwar A M, et al. The Measurement of Residual Stress Distribution Due to Edge Dimpling. *Experimental Mechanics*, 1984, 9: 252 ~ 256



(上接 80 页)

标上干扰激起的系统对应阶振动振型, 特征向量则不一定描述系统对应阶振型。但反过来, 系统对应阶振型总与对应阶某个特征向量线性相关。

参 考 文 献

- 1 Rayleigh L. *Theory of Sound*. New York: Dover Publications, 1945
- 2 Caughey T K. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *J Appl Mech*, 1960, 27
- 3 郑兆昌. 多自由度复模态理论的摄动方法 (一) 一级摄动. 见: 信号处理在振动工程中应用学术会议论文. 南京, 1983
- 4 Foss K A. Coordinates which uncouple the equation of damped linear dynamic systems. *J Appl Mech*, 1958, 25
- 5 张阿舟, 朱德懋. 阻尼系统的振动分析. 见: 信号处理在振动工程中应用学术会议论文. 南京, 1983
- 6 房殿军. 复模态理论及其在轧钢机扭振中的应用: [硕士论文]. 北京科技大学, 1985
- 7 Fanzly I, Bishop R E D. On the dynamics of linear non-conservation system. In: *Proc Roy Soc, Ser A*, 1976. 352
- 8 胡海昌. 多自由度线性阻尼系统的振动问题. *固体力学学报*, 1980(1)
- 9 方同. 多自由度线性阻尼系统的模态分析法. *固体力学学报*, 1981(3)
- 10 高尔腊伊 A R, 瓦特桑 G A 著, 唐焕文译. 矩阵特征问题的计算方法. 上海: 上海科学技术出版社, 1980
- 11 韩二中. 复模态现象的实质. 见: 信号处理在工程中的应用学术会议论文. 南京, 1983
- 12 黄汉舟. 机械振动分析方法与轧钢机扭振的研究: [硕士论文]. 北京科技大学, 1986