

金属压力加工问题的流函数速度模式上限解

杨海波 汪家才 刘光涛

北京科技大学机械工程学院, 北京 100083

摘要 采用流函数法构造了塑性变形金属流动的完备速度模式, 对 Mises 材料平面变形和轴对称变形问题, 提出并推证了运动可能速度场应满足的力学边界条件——“边界切应力”约束方程, 将求解与运动可能速度相对应的应力场归结为确定一点静水压力的问题, 实现了由上限法确定问题的完全解, 应用这一理论对锥模拔管问题进行了计算分析。

关键词 流函数, 上限定理, 力学约束

中图分类号 TG301, TG356.5

Upper-Bound Solution of Metal Forming Problem with the Flow Function Velocity Model

Yang Haibo Wang Jiakai Liu Guangtao

Mechanical Engineering College, USTB, Beijing 100083, PRC

ABSTRACT The complete velocity model for plastic metal is structured with flow function. The boundary tear stress condition, which should be met by the velocity field of the Mises material plan or axisymmetrical deformation, is raised. The stress field corresponding the velocity could be obtained by the resolution of one point uniform stress and the answer for tube drawing process is ascertained with this sort of theorem.

KEY WORDS flow function, upper bound approach, mechanics retrain

应用上限法 (UBA) 分析金属压力加工问题, 核心是如何更精确地反映材料真实流动情况, 设计构造运动可能速度场 \dot{U}_i^k 。经验表明, 耗散功率 W_i^k 对 \dot{U}_i^k 并不敏感, 即使所设计的速度场较为简单, 也可得出较好的工艺载荷的上限解。因此保证使 W_i^k 取得极小值的 \dot{U}_i^k 已充分地接近了真实的速度场, 并使与 \dot{U}_i^k 相应的应力场是静力许可的, 寻求问题的完全解, 是上限法当前的研究方向^[1~3]。

1 金属压力加工问题的上限解法

在金属压力加工过程中, 塑性变形毛坯内各点处的应力 σ_{ij} , 位移速度 \dot{U}_i 及应变速率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 之间应满足一定的条件。

任何满足给定边界条件的位移速度在材料变形域中的分布称之为“运动可能速度场”，以 \dot{U}_i^k 表示。在所有的 \dot{U}_i^k 中，真实的 \dot{U}_i^k 使得能量的耗散功率 W_c^k 取得最小值（上限定理）。此时与真实速度场相应的应力场 σ_{ij}^k （由材料的本构关系给出）或唯一确定或当材料不可压缩时，最终相差一静水压力。当应力场 σ_{ij}^k 是静力许可的，即 σ_{ij}^k 满足物体内的微分平衡方程、屈服条件及在力面 S_F 和速度面 S_c 上的应力边界条件时，问题获得完全解。为此，对 Mises 材料，首先应求得真实速度场，其次要由一定形式的外力边界条件求一静水压力场。

2 运动可能速度场的构成

体积不变条件和边界条件对速度均为线性关系，因此我们可以将运动可能速度场 \dot{U}_i^k 分解为两部分；基础速度场 \dot{U}_{i0}^k 和附加速度场 \dot{U}_{ir}^k ，即 \dot{U}_i^k 是由 \dot{U}_{i0}^k 和 \dot{U}_{ir}^k 叠加构成^[4]。

$$U_i^k = U_{i0}^k + U_{ir}^k \quad (1)$$

基础速度场反映变形金属质点的基本流动规律，满足问题的给定速度边界条件。 \dot{U}_{i0}^k 一般不含未知量（某些情况下含优化变量），并能保证 \dot{U}_i^k 足够快地逼近真实速度场。对于稳态问题（轧制、拉拔、挤压等）可以借助流面或流线由流函数设定基础速度场，而对于非稳态问题（镦粗）、周期间歇和伪稳态问题（工件发生内部缺陷时）则可以设定满足非齐次速度边界条件的简单速度场。

附加速度场 \dot{U}_{ir}^k 是修正补充基础速度场的，在物理方面应满足齐次速度边界条件，在数学方面要具有完备性，保证由基础速度场 \dot{U}_{i0}^k 和附加速度场 \dot{U}_{ir}^k 合成的速度场 \dot{U}_i^k 包含有真实速度场。根据泛函空间理论，附加速度场可采用希尔伯特空间相对完备的坐标函数族来表示。

3 流函数速度模式

3.1 流函数法基本概念

引用流函数设定连续速度场，就是将稳定塑性变形区内金属流动时质点的运动轨迹看作流线，其上任一点的切线方向，即为该瞬时质点的流动方向。

在平面或轴对称状态下的稳定塑性变形中，各速度分量可由流函数 $\Phi(x_1, x_2)$ 来确定；此处的 x_1, x_2 在轴对称情况下应理解为 z, r 。对于平面问题，由 Φ 确定的速度分量为：

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \partial \Phi / \partial x_2 \\ \dot{U}_2 = -\partial \Phi / \partial x_1 \end{cases} \quad (2)$$

对于轴对称问题，由 Φ 确定的速度分量为：

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (1/x_2) \partial \Phi / \partial x_2 \\ \dot{U}_2 = -(1/x_2) \partial \Phi / \partial x_1 \end{cases} \quad (3)$$

\dot{U}_1, \dot{U}_2 自然满足体积不可压缩条件。

流线方程 $dx_2/dx_1 = \dot{U}_2/\dot{U}_1$ 的解由下列函数表达：

$$\eta(x_1, x_2) = \text{const} \quad (4)$$

则流函数具有下列一般形式：

$$\Phi(x_1, x_2) = g\{\eta(x_1, x_2)\} = \text{const} \quad (5)$$

如图 1 所示, 在不变形区 1 和不变形区 3 中, 流线由下列条件表达:

$$\eta(x_1, x_2) = x_2 = c \quad (6)$$

设变形域 2 中约束金属流动的工具表面形状由方程 $X_2 = T_1(x_1)$, $X_2 = T_2(x_1)$ 来描述, 为使 $\Phi^k(x_1, x_2)$ 是运动可能的, 则 Φ^k 应满足下列边界条件:

(a) 沿工具与毛坯接触表面, $T_1(x_1) - x_2 = 0$, 即该接触表面为流面; 且

$$\begin{aligned} \Phi^k(x_1, x_2) &= g\{\eta[x_1, T_1(x_1)]\} = (\dot{U}_1)_1 \cdot A_0 \\ &= (\dot{U}_1)_3 \cdot A_1 \end{aligned} \quad (7)$$

式中, A_0 , $(\dot{U}_1)_1$ 和 A_1 , $(\dot{U}_1)_3$ 分别为变形初始和终了时毛坯的断面面积和金属流动的速度.

(b) 沿接触表面 ($T_2(x_1) - x_2 = 0$), 有

$$\Phi^k(x_1, x_2) = g\{\eta[x_1, T_2(x_1)]\} = 0 \quad (8)$$

(c) 在由刚性区进入塑性区的边界 Γ_0 上; $x_2 = s_1(x_1)$, 相应有

$$g\{\eta(x_1, s_0)\} = (\dot{U}_1)_3 \cdot s_0 \quad (9)$$

(d) 在由塑性区进入刚性区的边界 Γ_1 上; $x_2 = s_1(x_1)$, 相应有

$$g\{\eta(x_1, s_1)\} = (\dot{U}_1)_3 \cdot s_1 \quad (10)$$

利用方程 (7)、(8) 来构造运动可能流函数 $\Phi^k(x_1, x_2)$, 利用方程 (9)、(10) 可求解边界 Γ_0 和 Γ_1 .

引用流函数来设计构造速度场, 具有容易满足速度边界条件, 减少待求未知量和自然满足体积不可压缩条件等优点.

3.2 基础流函数、附加流函数、完全流函数

相应前面对速度场的分解, 定义与基础速度场相对应着基础流函数 Φ_0^k , 与附加速度场相对应着附加流函数 Φ_f^k , 例如对平面问题即有:

$$\dot{U}_{10}^k = \partial\Phi_0^k/\partial x_2, \quad \dot{U}_{20}^k = -\partial\Phi_0^k/\partial x_1 \quad (11)$$

$$\dot{U}_{1f}^k = \partial\Phi_f^k/\partial x_2, \quad \dot{U}_{2f}^k = -\partial\Phi_f^k/\partial x_1 \quad (12)$$

3.2.1 基础流函数 $\Phi_0^k(x_1, x_2)$

$\Phi_0^k(x_1, x_2)$ 一般可借助变形区边界流线或流面来构造, 对平面变形可取

$$\Phi_0^k(x_1, x_2) = K'[x_2 - T_2(x_1)]/[T_1(x_1) - T_2(x_1)] \quad (13)$$

对轴对称变形可取

$$\Phi_0^k(x_1, x_2) = K'[x_2^2 - T_2^2(x_1)]/[T_1^2(x_1) - T_2^2(x_1)] \quad (14)$$

式中 K' 为待定系数, 由变形区断面流通量确定. Φ_0^k 不含其它未知量而仅为坐标的函数.

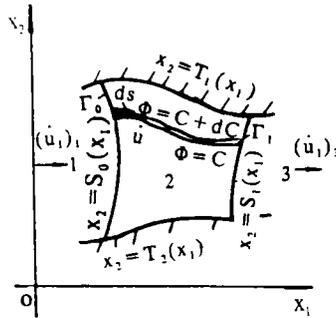


图 1 流函数法

1—刚性区; 2—塑性区; 3—刚性区

Fig.1 Flow function method

3.2.2 附加流函数 $\Phi_f^k(x_1, x_2, a_{mn})$

由 Weirstrass 定理, 附加流函数 Φ_f^k 可由函数序列 $\sum \sum a_{mn} x_1^m x_2^n$ 来一致逼近. 考虑到附加速度场应满足齐次速度边界条件, 上述函数序列应乘上因子 $Q_1, Q_2, \dots, Q_n; Q_i (i=1, 2, \dots, n)$ 由齐次速度边界条件确定. 于是 Φ_f^k 取为

$$\Phi_f^k(x_1, x_2, a_{mn}) = Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_n \sum \sum a_{mn} x_1^m x_2^n \quad (15)$$

3.2.3 完全流函数 $\Phi^k(x_1, x_2, a_{mn})$

由 $\Phi_0^k(x_1, x_2)$ 与 $\Phi_f^k(x_1, x_2, a_{mn})$ 叠加合成为完全流函数 $\Phi^k(x_1, x_2, a_{mn})$

$$\Phi^k(x_1, x_2, a_{mn}) = \Phi_0^k(x_1, x_2) + \Phi_f^k(x_1, x_2, a_{mn}) \quad (16)$$

$\Phi^k(x_1, x_2, a_{mn})$ 确定的速度场是完备的, 即 Φ^k 确定的速度场一定包含真实速度场.

4 完备运动可能速度场的“力学边界条件”

针对 W_0^k 对 \dot{U}_f^k 并不敏感, 为保证在使 W_0^k 极小化过程中速度场能够充分地接近真实速度场, 除首先应构造一个包含全部运动可能速度场的完备速度场族外, 还应寻求进一步措施.

对于发生塑性变形的理想刚塑性材料, 其本构关系由 Levy-Mises 方程确定

$$\sigma'_{ij} = (2T/H) \dot{\epsilon}_{ij} \quad (17)$$

式中 H 为应变速率强度, T 为剪应力强度. 由式 (17) 可见, 由速度场根据几何方程确定的应变速率场 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 对应着一个偏应力场 σ'_{ij} .

在变形区边界上某一点 $M(x_1, x_2)$, 外法线方向 $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta)$, 设该点处给定切应力为 τ^* (一般为摩擦力), 而该点处与应力场相对应的切应力 τ^k 可被表示为

$$\tau^k = (\sigma'_{11} - \sigma'_{22}) \sin 2\theta / 2 - \sigma'_{12} \cos 2\theta \quad (18)$$

而应力场 σ'_{ij} 可表示为由一偏应力场 σ'_{ij} 和一静水压力场 $\delta_{ij} \sigma_m$ 合成, 即

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + \delta_{ij} \sigma_m \quad (19)$$

式中 δ_{ij} 为克罗内克记号.

将式 (19) 代入 (18), 整理得

$$\tau^* = (\sigma'_{11} - \sigma'_{22}) \sin 2\theta / 2 - \sigma'_{12} \cos 2\theta \quad (20)$$

当所求速度场为真时, 应有 $\tau^k = \tau^*$.

将几何方程及式 (17) 代入式 (20), 并考虑到条件 $\tau^k = \tau^*$, 整理得

$$(\partial \dot{U}_1 / \partial x_1 - \partial \dot{U}_2 / \partial x_2) \sin 2\theta - (\partial \dot{U}_1 / \partial x_2 + \partial \dot{U}_2 / \partial x_1) \cos 2\theta = (H/T) \cdot \tau^* \quad (21)$$

式 (21) 为运动可能速度场应满足的力学边界条件式. 在极小化耗散功率 W_0^k 、由运动可能速度场族寻求真实速度场的过程中, 这一条件将以约束的形式参加寻优, 所以称式 (21) 为速度场“边界切应力约束”条件. 它将确保和加速运动可能速度场向真实速度场逼近.

5 应力场和静水压力场的求解

由式 (17) 和式 (19) 可见, 在运动可能速度场 \dot{U}_f^k 确定后, 求解应力场 σ'_{ij} 的问题就归

结为求解静水压力场 $\delta_{ij}\sigma_m$ 的问题，将式 (17)、式 (19) 代入平衡方程

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j + B_i = 0 \tag{22}$$

当不计体力， $B_i=0$ 时，整理得

$$\delta_{ij}(\partial\sigma_m/\partial x_j) = -2\partial[(T/H)\varepsilon_{ij}]/\partial_j \tag{23}$$

外力边界条件为

$$T_i = \sigma_{ij}n_j \tag{24}$$

一般可放宽为

$$F_i = \int T_i ds \tag{25}$$

式中 F_i 局部边界外力的合力。

对于轴对称问题，取 $x_1=z, x_2=r$ ，式 (23) 可具体表达为

$$\left. \begin{aligned} \partial\sigma_m/\partial r &= -\partial(\sigma'_r + \tau_{rz})/\partial r - (\sigma'_r - \sigma'_\theta)/r \\ \partial\sigma_m/\partial z &= -\partial(\sigma'_z + \tau_{rz})/\partial z - \tau_{rz}/r \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

将式 (26) 两方程的右边分别记为 $R(r, z)$ 、 $Z(r, z)$ ，求解式 (26) 可解定静水压力场

$$\sigma_m(r, z) = \sigma_m(r_0, z_0) + \int_{r_0}^r R(r, z) dr + \int_{z_0}^z Z(r, z) dz \tag{27}$$

当速度场确定后，函数 $R(r, z)$ 、 $Z(r, z)$ 是 r, z 的连续函数，由上式可知当已知变形域中一点 (r_0, z_0) 的静水压力 $\sigma_m(r_0, z_0)$ ，静水压力场 $\delta_{ij}\sigma_m(r, z)$ 即可确定。因此，求解应力场 $\sigma_{ij}(r, z)$ 的问题就归结为求解变形域内一点静水压力 $\sigma_m(r_0, z_0)$ 的问题。

6 算例—锥模拔管

现以理想刚塑性材料通过锥模等径拔管问题说明前述理论的应用。考虑到金属变形的对称性，选取任一子午面上的变形区域为研究对象，变形区几何形状和参数如图 2 所示。

延伸率为 30%， $R_0=55, R_1=45, \alpha_1 = -\alpha_2 = 16.7^\circ$ ，附加速度场的维数为 $m \times n=9$ 的等径拔管过程的功率分配为：外模摩擦功率 354.8K，内模摩擦功率为 257.5K，入口间断功率为 327K，出口间断功率为 406.9K，变形功 1438K，全功率为 2783K，其中 K 为屈服剪应力。图 3 为各应变速率及应变速率强度的等高线分布规律，由应变速率强度 H 的分布规律可见，变形在入口边界最剧烈。

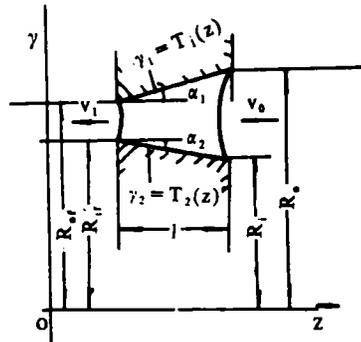


图 2 拔管变形区几何形状及参数 Fig.2 Plastic zone and its parameters in tube drawing

7 结论

本文提出并推证了 Mises 材料平面变形或轴对称变形问题的运动可能速度场应满足的力学边界条件—“边界切应力约束”方程。这一条件以约束的形式进入极小化 W_c^k 的过程中，从

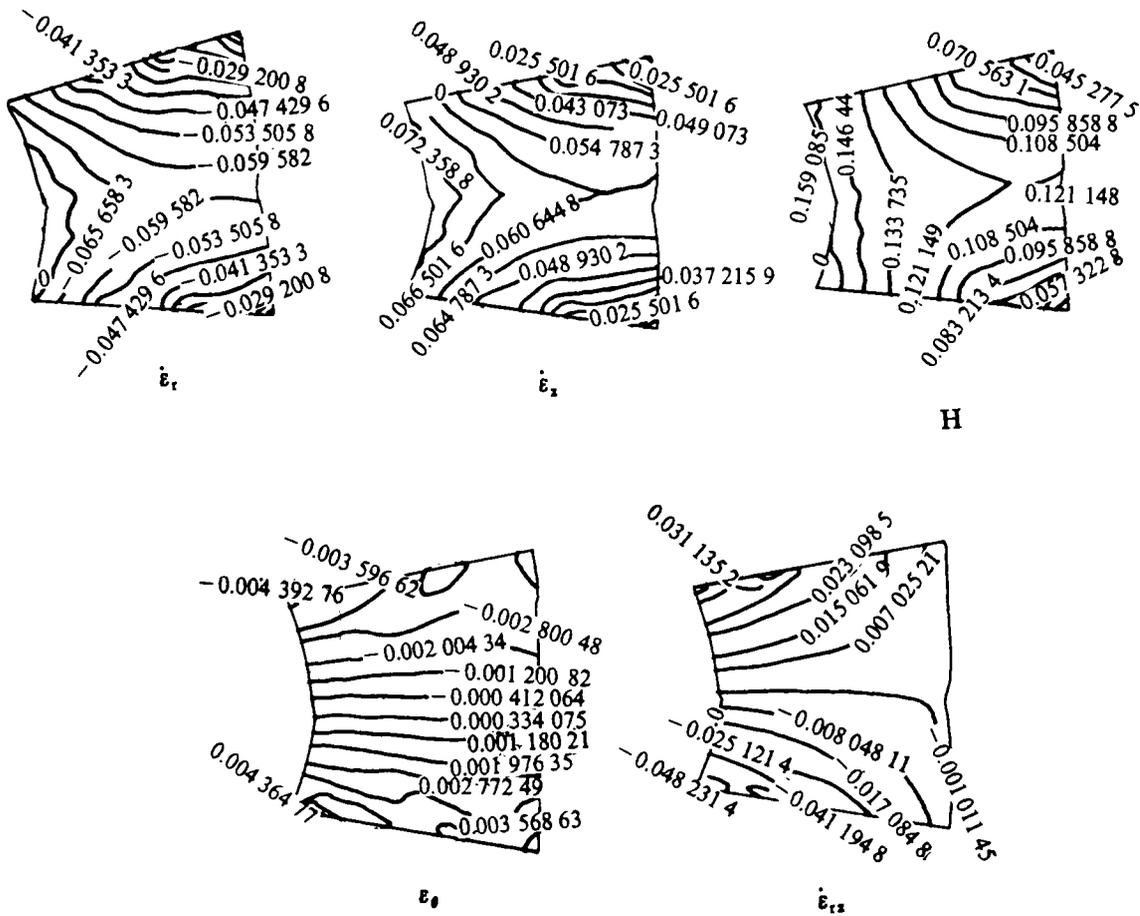


图3 应变速率 $\dot{\epsilon}_{ij}$ 及剪应变速率强度 H 等高线

Fig.3 Component of strain rate tensor and intensity of shear strain-rate

而克服由于 W_c^k 对 U_c^k 不敏感，难以通过极小化 W_c^k 由 U_c^k 确定真实速度场的问题。采用流函数完备速度模式，可实现对真实速度场的无限逼近。由两个外力边界条件确定一点的静水压力，求解了问题的应力场。运动可能速度场应满足的力学边界条件——“边界切应力”约束方程的提出具有理论意义和实际应用价值。采用上述方法解决了由上限法求两类常见金属压力加工问题——平面变形和轴对称变形完全解的问题。

参 考 文 献

- 1 Thomsen E G, Yang C T, Kobayashi S. Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing New York: The Macmillan, 1965
- 2 Avitzler B. Metal Forming—Processes and Analysis. Hemtington: Krieger, 1979
- 3 翁克索夫等. 金属塑性变形理论. 北京: 机械工业出版社, 1992
- 4 汪家才. 金属压力加工问题的现代力学原理. 北京: 冶金工业出版社, 1991