

# 控制算法鲁棒性的通用量化方法

郑秋宝 舒迪前

北京科技大学自动化信息工程学院, 北京 100083

**摘要** 针对各类控制算法在鲁棒性分析上存在的“不可比”性, 提出了一种通用的控制算法鲁棒性量化指标, 并借此对两种模型算法控制(MAC)算法—基本MAC和增量型MAC的鲁棒性进行了量化分析, 得到了与仿真研究和实际控制相一致的结果。

**关键词** 鲁棒性, 系统分析, 量化/模型算法控制

**中图分类号** TP13, O231

## General Quantitative Method for The Analysis of Robustness of Control Algorithms

Zheng Qiubao Shu Diqian

College of Automation and Information Engineering, USTB, Beijing 100083, PRC

**ABSTRACT** Because of the difference of simulation method and theoretical analysis measure, the analysis results of control algorithms, which published on references, are incomparable. In order to eliminate the “incomparability”, a general quantitative criterion for the analysis of robustness of control algorithms is presented, and the robustnesses of two kinds of Model Algorithmic Control (MAC) algorithms—Basic MAC and Incremental MAC are analyzed by this way. The results show that the quantitative criterion is compatible with the results of their simulations and real-time applications, and it is suitable for the theoretical research of most of control algorithms.

**KEY WORDS** robustness, system analysis, quantitative / model algorithmic control

近年来, 出于实际应用的需要, 控制算法的鲁棒性已引起人们的广泛注意, 并且国内外许多学者提出了一系列鲁棒性良好的控制算法。但是, 由于各种算法的差异, 其分析和评估方法不一样, 从而造成了各类算法之间没有统一衡量指标的局面, 使之缺乏“可比性”。此外, 大多数控制算法的鲁棒性研究目前还主要停留在“定性分析”上, 常常需借助特定环境下的仿真结果来评价其性能的好坏。因此, 定义一个通用的鲁棒性指标是非常必要的。本文针对这个问题就控制算法鲁棒性的量化指标进行讨论, 并以两种模型算法控制算法的鲁棒性分析为例, 阐述了文中所提鲁棒性指标的可行性。

### 1 鲁棒性量化指标的定义

控制算法的鲁棒性是指当被控对象的特性发生变化时，如系统成分的忽略，大的参数变化，阶次和时延发生迁移等情况下，控制算法对系统稳定性的保持能力和对期望输出的跟踪能力。因而，考虑一个算法的鲁棒性应从如下3个方面着手：(1) 系统本身的稳定性；(2) 系统的静差；(3) 结构变化时系统的稳定性。若仅考虑线性系统，上述第3方面还可具体描述为：(1) 阶次变化时系统的稳定性；(2) 被控对象模型参数剧变时系统的稳定性；(3) 时延变化时系统的稳定性。

根据上述5个方面的要求，鲁棒性量化指标不仅要反映系统的静态响应质量，而且要考虑其动态性能，如跟踪速度、超调量等。为此，可以给出它的定义形式如下：

$$R = \frac{\inf_{d=1, \theta \in \Lambda} \{\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q\}}{\inf_{\theta \in \Lambda} \{[\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q]_{d=1} / M(\theta) N_0(\theta)\}} \quad (1)$$

式中  $\theta, \Lambda$  分别表示控制算法的可调参数和可调参数域； $d, Q$  分别表示系统模型失配系数(阵)及相应的参数域 ( $d$  为单位阵时，表示不存在模型失配)； $M(\theta)$  表示系统稳定裕度对鲁棒性指标  $R$  的修正因子，且有：

$$M(\theta) = P(\theta)G(\theta) / (1 + P(\theta)G(\theta))|_{\theta=\theta^*} \quad (0 \leq M(\theta) \leq 1) \quad (2)$$

$G(\theta), P(\theta)$  分别表示系统模型不失配时的幅值裕度和相位裕度 ( $\theta^*$  表示最优参数)； $N_0(\theta)$  表示系统噪声对鲁棒性指标  $R$  的影响系数，且有：

$$N_0(\theta) = \text{Var}(\xi) / \text{Var}(y) \quad (0 \leq N_0(\theta) \leq 1) \quad (3)$$

上式中分子、分母分别表示系统噪声方差和输出方差； $\bar{y}, \bar{y}_r$  分别表示系统输出均值和期望输出均值； $\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q$  表示  $\bar{y}$  与  $\bar{y}_r$  的加权范数(加权阵为  $Q$ )，其一般形式如下：

$$\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q = \sum_{i=0}^{\infty} [\bar{y}(i) - \bar{y}_r(i)]^2 \quad (4)$$

由(1)式可知， $0 \leq R \leq 1$ 。  $R$  越大，控制算法的鲁棒性越强。此外，式中各参数项的物理含义为：

(1)  $\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q$  不仅反映系统的静态特性(静差)，而且反映本身的稳定性。此外，它还能描述系统的瞬态特性。若超调量越大或响应速度越慢，则  $\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q$  越大， $R$  越小，即鲁棒性越弱。

(2)  $M(\theta)$  反映系统的稳定裕度。只要幅值裕度和相位裕度二者中有一个较小则  $M(\theta)$  就小， $R$  也就小鲁棒性就弱。

(3)  $N_0(\theta)$  反映系统的抗干扰能力。输出方差越大， $N_0(\theta)$  越小， $R$  越小即鲁棒性越弱。

显然， $R$  的定义包含了上面提出的鲁棒性应考虑的5个方面，并且可通过加权阵  $Q$  的合理选择来达到强调某种系统特性的目的。例如，当  $i$  较小时，将  $Q_i$  选得较大，然后逐步使之变小，便可以达到强调超调量的抑制作用和提高响应速度的目的。反之，当  $i$  较小时，将  $Q_i$  选得较小，然后逐步使之变大，便可以达到强调调节时间的目的。

## 2 基本 MAC 的鲁棒性分析

### 2.1 基本 MAC 概述

对于脉冲响应如图 1 所述的线性系统而言, 其输出可用离散卷积公式近似描述为:

$$y(k+1) \approx g_1^0 u(k) + g_2^0 u(k-1) + \dots + g_N^0 u(k-N+1) + \xi(k) \triangleq g^{0T} U(k) + \xi(k+1) \quad (5)$$

式中: 脉冲响应系列  $g^0 = (g_1^0, g_2^0, \dots, g_N^0)^T$ , 输入向量  $U(k) = [u(k), \dots, u(k+N+1)]^T$ ,  $y(k+1)$  表示系列在  $t = (k+1)T$  时刻的实际输出(向量),  $u(i)$  表示第  $i$  个采样时刻, 即  $t = iT$  时的控制(向)量,  $N$  一般为  $30 \sim 50$ .  $\xi(k)$  为外来不可测噪声.

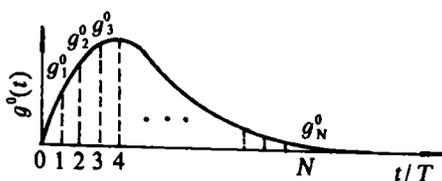


图 1 系统的脉冲响应

若考虑测量误差, 被控对象的实际脉冲系列假设为:  $g = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T$ , 则系统的预测模型为:

$$y_M(k+1) = g(z^{-1})u(k) \quad (6)$$

式中:  $g(z^{-1}) = g_1 + g_2 z^{-1} + \dots + g_N z^{-N+1}$ ,  $z^{-1}$  为单位延迟因子.

设系统的参考轨迹为:

$$y_r(k+1) = \frac{N(z^{-1})}{M(z^{-1})} W(k) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha z^{-1}} W(k) \quad (7)$$

式中:  $\alpha$  为柔化系数, 取值范围为  $[0, 1]$ ;  $W(k)$  为被跟踪信号.

MAC 的整体控制框图如图 2 所示.

基本 MAC 的闭环系统传函为:<sup>[3]</sup>

$$\frac{y(z^{-1})}{W(z^{-1})} = \frac{(1-\alpha)g^0(z^{-1})}{(1-\alpha)g^0(z-1) + (z^{-1})g(z^{-1})} \quad (8)$$

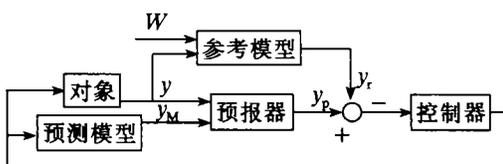


图 2 MAC 的控制框图

由于控制量约束与否不影响 MAC 算法的稳定性<sup>[1, 2]</sup>, 所以为便于分析起见, 下面不考虑控制量的约束问题.

另外, 由于闭环 MAC 不存在静差<sup>[3]</sup>, 并且系统参数、结构和时延变化的结果是其脉冲响应的变化, 因此基本 MAC 的鲁棒性分析可简化为它的稳定性及其对脉冲响应变化的适应能力的分析.

根据上述分析, 可以将 (1) 式中涉及的模型失配问题用如下失配公式描述:

$$g^{0T} = dg^T \quad (9)$$

式中:  $d$  为失配因子 (向量).

## 2.2 鲁棒性指标的计算

### 2.2.1 稳定裕度

根据 (1) 式中的定义可知, 计算稳定裕度对鲁棒性的影响因子时可以暂不考虑模型的失配问题, 故基本 MAC 的闭环传函可简化为:

$$y(z^{-1})/w(z^{-1}) = (1-\alpha)/(z-\alpha) \quad (10)$$

根据上式可得出如图 3 所述的基本 MAC 的等效结构框图. 图中  $G(z)$  为前向传函, 并且  $G(z) = (1-\alpha)/(z-1)$ .

为分析基本 MAC 的稳定裕度, 将上式写成频域形式 (即: 令  $z = e^{j\omega}$ ).

$$G(w) = -\frac{1-\alpha}{2} - j\frac{1-\alpha}{2} \times \frac{\sin(w)}{1-\cos(w)} \quad (11)$$

相应的奈氏曲线如图 4 所述。

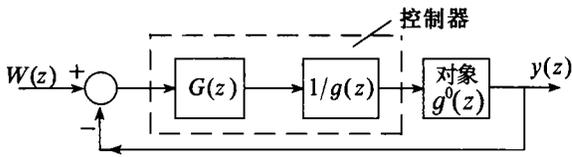


图 3 基本 MAC 的等效结构框图

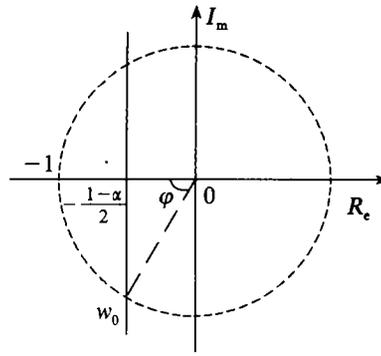


图 4 基本 MAC 的奈氏曲线

显然，幅值裕度  $G(\alpha)$ 、相位裕度  $P(\alpha)$  以及稳定裕度修正系数  $M(\alpha)$  分别为：

$$G(\alpha) = 1/(1-\alpha) \quad (12)$$

$$P(\alpha) = \cos^{-1} [(1-\alpha)/2] \quad (13)$$

$$M(\alpha) = \frac{2\cos^{-1} [(1-\alpha)/2]}{1-\alpha + 2\cos^{-1} [(1-\alpha)/2]} \quad (14)$$

### 2.2.2 $\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q$ 的求取

当基本 MAC 的输入为无约束，并且模型存在常值失配时，假设输入给定信号为一幅值为  $C$  的阶跃函数，且  $Q_i=1$ ，则此时的  $\bar{y}_r=C$ 。另外，由于基本 MAC 算法具有线性性，并且其系统控制律和输出均值在存在均值为 0 的噪声干扰和无干扰两种情况下完全一致，因此计算  $\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q$  时可以假设无噪声干扰。

在上述条件下，基本 MAC 的闭环方程为： $y_r(k+1) = y_m(k+1) + y(k) - y_m(k)$ 。

将  $y_r(k+1) = \alpha y(k) + (1-\alpha)C$  代入上式，并考虑模型失配方程  $y(k) = d y_m(k)$  得：

$$[1-(1-\alpha)d][y(k)-C] = y(k+1) - C$$

因为， $\|y(k), C\|_Q = \sum_{k=0}^{\infty} [y(k)-C]^2$ ，所以，

$$(\|y(k), C\|_{d=1}) / (\|y(k), C\|_{d \neq 1}) = d[2-(1-\alpha)d]/(1+\alpha) \quad (15)$$

### 2.2.3 噪声影响系数 $N_0(\alpha)$ 的求取

当系统内存在外来白噪声干扰，且模型存在常值失配时，由式 (5) 不难得出<sup>[3]</sup>：

$$N_0(\alpha) = [2-(1-\alpha)d]/2 \quad (16)$$

综合 (14)、(15) 和 (16) 3 式可得基本 MAC 的鲁棒性系数如下：

$$R = \inf_{\alpha \in [0, 1]} (1-\alpha^2)^{-1} / \inf_{\alpha \in [0, 1]} \{M^{-1}(\alpha) \cdot 2[2-(1-\alpha)d]^{-2}[(1-\alpha)d]^{-1}\} \quad (17)$$

## 2.3 鲁棒性分析

为分析  $\alpha$  对基本 MAC 鲁棒性的影响，有必要对 (17) 式做进一步的研究，并忽略它的极值问题。因此，(17) 式可写成：

$$R = M(\alpha) \frac{[2-(1-\alpha)d]^2 d}{2(1+\alpha)} \quad (18)$$

由(12)、(13)和(14)3式可知:当 $\alpha$ 增大,即采用慢的参考轨迹时, $P(\alpha)$ 和 $G(\alpha)$ 均随 $\alpha$ 的增大而增大,从而使 $M(\alpha)$ 也相应增大.同时,因为:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{[2-(1-\alpha)d]^2}{2(1+\alpha)} = \frac{[2-(1-\alpha)](3d+d\alpha-2)}{2(1+\alpha)} \quad (19)$$

根据稳定性要求, $d \in [0, 2/(1+\alpha)]$ ,所以 $\alpha$ 对鲁棒性指数 $R$ 的影响可描述如下:

(1)当 $0 \leq \alpha \leq 2/(d-3)$ ,且 $0 < d \leq 2/3$ 时,上式小于0.则(17)式的第一项随 $\alpha$ 的增大而减小.此时, $\alpha$ 对 $R$ 的影响就要视 $M(\alpha)$ 与(18)式第二项二者随 $\alpha$ 的变化率而定.一般来说,当 $d$ 较大时, $R$ 随 $\alpha$ 的减函数,应取较小的 $\alpha$ .

(2)当 $2/(d-3) \leq \alpha \leq 1$ 时,上式大于0, $R$ 为 $\alpha$ 的增函数,应取较大的 $\alpha$ .

上述结果与仿真结果完全吻合<sup>[3,4]</sup>.这说明了本文提出的鲁棒性指数可以用于某些控制算法的鲁棒性的分析与研究.虽然,上述结果是在无输入约束的情况下得出的,但仍具有一般性,因为MAC算法只要在没有约束时稳定,在有约束时就必然稳定<sup>[1,2]</sup>.

### 3 增量型 MAC 的鲁棒性分析

#### 3.1 增量型 MAC 概述

为提高基本 MAC 抗系统的非自平衡能力,可以对(5)~(8)式进行增量化或处理,得到如下所述的系统模型:

$$y(k+1) = y(k) + g^{0T} \cdot \Delta \cdot U(k) + \Delta \cdot \xi(k+1) \quad (20)$$

式中: $\Delta = 1 - z^{-1}$ ,其余参数意义同前.

$$\text{预测模型为: } y_M(k+1) = y_M(k) + g^T \Delta \cdot U(k) \quad (21)$$

$$\text{前馈式参考轨迹为: } y_r(k+1) \cong \alpha y(k) + (1-\alpha)W(k+1) \quad (22)$$

增量型 MAC 的整体控制框图同图 2.

增量型 MAC 的闭环系统传函为<sup>[3]</sup>:

$$\frac{y(z^{-1})}{W(z^{-1})} = \frac{z(1-\alpha)g^0(z^{-1})}{(1-\alpha)g^0(z^{-1}) + (z-1)g(z^{-1})} \quad (23)$$

显然,两种 MAC 算法的特征多项式完全相同,故基本 MAC 的稳定性结果适用于增量型 MAC.即:若增量型 MAC 的预测模型存在常值增益失配,则失配因子 $d$ 应满足的稳定性条件为 $d \in (0, 2/(1+\alpha))$ ,并且 $\alpha$ 越大,稳定域越大.

#### 3.2 鲁棒性指标的计算

##### (1) 稳定裕度

同上节一样,若暂时不考虑模型的失配问题,则增量型 MAC 的闭环传函可简化为:

$$y(z)/w(z) = z(1-\alpha)/(z-\alpha) \quad (24)$$

比较(24)与(10)两式可知:增量型 MAC 的闭环传函比基本 MAC 的闭环传函在分子中多了一个超前因子 $z$ ,故具有较强的抗时延能力.增量型 MAC 的等效结构框图的形式与图 3 相同,只不过其前向传函为 $G(z) = z(1-\alpha)/[\alpha(z-1)]$ .

前向传函  $G(z)$  写成频域形式 (即: 令  $z=e^{j\omega}$ ), 有:

$$G(w) = (1/\alpha) \cdot e^{j\omega} G_0(w) \tag{25}$$

式中:  $G_0(w)$  表示基本 MAC 的前向传函.

增量型 MAC 的幅值裕度为基本 MAC 的  $2\alpha$  倍, 即:  $G(\alpha) = 2\alpha/(1-\alpha)$ . 其相位裕度及稳定裕度修正系数分别为:

$$P(\alpha) = w + \cos^{-1}[(1-\alpha)/2] \tag{26}$$

$$M(\alpha) = \frac{2\alpha\{w + \cos^{-1}[(1-\alpha)/2]\}}{1-\alpha + 2\alpha\{w + \cos^{-1}[(1-\alpha)/2]\}} \tag{27}$$

(2)  $\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q$  的求取 在上节相同的条件下,  $\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q$  的求取过程及其结果与上节完全相同.

(3) 噪声影响系数  $N_0(\alpha)$  的求取 当系统内存在外来白噪声干扰, 并且模型存在常值失配时, 由增量型 MAC 的增量模型 (20) 式及其闭环模型可以得出<sup>[3]</sup>:

$$N_0(\alpha) = [2-(1-\alpha)d]/2 \tag{28}$$

由上述分析可知两种 MAC 算法的鲁棒性系数的唯一区别在于  $M(\alpha)$  的不同.

### 3.3 鲁棒性分析

由于增量型 MAC 鲁棒性指数  $R'$  与基本 MAC 鲁棒性指数  $R$  的唯一区别在于  $M(\alpha)$  的不同, 所以其鲁棒性分析关键在于  $M(\alpha)$  的分析. 由 (27) 式可知:  $M(\alpha)$  为  $\alpha$  的增函数, 表明两种鲁棒性分析结果基本类似, 在此不再细述.

比较 (27) 和 (14) 两式可以发现: 当  $\alpha$  和  $W$  均较大时,  $R' > R$ .

它表明被控系统跟踪慢的参考轨迹时比跟踪快的更易稳定, 鲁棒性更强; 此外, 增量型 MAC 通常比基本 MAC 具有更强的鲁棒性. 这已被仿真结果验证<sup>[3, 4]</sup>. 它再次证明了本文提出的鲁棒性指数可以用于某些控制算法的鲁棒性的分析与研究.

## 4 结 论

由基本 MAC 和增量型 MAC 的鲁棒性分析可以看出: 文中所述鲁棒性量化指标的确能反映一类控制算法的鲁棒性, 可以作为控制算法理论分析和实际应用的指导性指标使用. 当然, 由于文中讨论的实例有限, 因而它能否用于更广泛的领域有待考验. 最后, 必须指出, 该鲁棒性量化指标用于一些复杂算法时, 可以借助于计算机技术, 对  $\|\bar{y}, \bar{y}_r\|_Q$  等因子进行在线数值化处理.

### 参 考 文 献

- 1 Ramine Rouhani, Raman K. Mehra. Model Algorithmic Control (MAC): Basic Theoretical Properties. Automatica, 1982, 18(4): 401 ~ 414
- 2 Raman K. Mehra. Model Algorithmic Control: Theoretical Results on Robustness. JACC, 1979, 1: 387 ~ 392
- 3 郑秋宝. 模型算法控制及其在加热炉上的应用: [硕士学位论文]. 北京: 北京科技大学, 1989
- 4 Zhend Qiubao (郑秋宝), Shu Diqian (舒迪前). Intelligent Self-tuning Model Algorithmic Control. In: Proceedings Intern. AMSE Conf. 'Signals and Systems'. France: AMSE Press, 1989 (3):19 ~ 29