

连铸坯凝固传热的交替隐式解法

张慧芳 吴懋林

北京科技大学

摘要 建立了连铸板坯凝固传热的二维数学模型,用交替隐式差分格式对模型进行离散化然后在计算机上求解,并用现场测试值对模型的数值计算结果进行了验证.

关键词 连铸,凝固,传热,数学模型

Alternate Implicit Solution for Heat Transfer in Continuous Cast Steel Slab

Zhang Hui Fang Wu Maolin

University of Science and Technology Beijing

ABSTRACT A mathematical model for heat transfer in continuous cast steel slabs has been established. An alternate implicit difference technique was used to reduce the transient conduction equation and boundary equations to the algebraic equations which can be programmed for computer solution. The result of calculation was tested and verified.

KEY WORDS continuous casting, solidification, heat transfer, mathematical model

目前传热数模的求解大多采用的是显式有限差分方法^[1],而用交替隐式格式的很少^[2].但从理论上的比较可以知道,交替隐式格式在运算速度及解的稳定性方面有着显式差分格式无法比拟的优越性^[3].因此,在求解数模型过程中采用了交替隐式差分格式,并将其计算结果与显式格式的计算结果进行比较.

1 连铸板坯凝固传热数学模型

1.1 建立数模的前提条件

假设:(1)忽略拉坯方向的传热,仅考虑铸坯厚度和宽度两个方向的传热,即采用二维

模型.

- (2) 铸坯厚度和宽度方向的传热看成轴对称, 温度场只计 1/4 的铸坯.
- (3) 注入结晶器的钢液温度恒定.
- (4) 在铸机的同一冷却区, 冷却强度相同, 忽略铸坯与辊道的接触热阻.
- (5) 对于铸坯液芯运动的对流传热, 引入有效导热系数.

1.2 凝固传热的控制方程

连铸过程是凝固和冷却的综合过程. 在钢液的凝固中除了有液相区和固相区外, 在一定温度范围内还存在液相和固相共存的两相区, 若用不稳态导热方程的热源函数来计算凝固潜热, 则描述铸坯凝固过程的主导方程为:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div}(k \cdot \text{grad}T) + F(x, y, z, \tau) \quad (1)$$

式中 $F(x, y, z, \tau)$ 表示相变热源分布特征函数, 假定 F 与铸坯的局部凝固速率成正比: $F = \rho L(\partial f_s / \partial \tau)$, 则式 (1) 可改写为:

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div}(k \cdot \text{grad}T) + \rho L \frac{\partial f_s}{\partial \tau} \quad (2)$$

式中: ρ —密度, kg/m^3 ; C_p —比热, $\text{J}/\text{kg} \cdot \text{C}$; k —导热系数, $\text{W}/\text{m} \cdot \text{C}$; L —凝固潜势, J/kg ; f_s —固相率.

令: $\frac{\partial f_s}{\partial \tau} = \frac{\partial f_s}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}$, 并代入式 (2), 经整理可得:

$$\rho C_e \frac{\partial T}{\partial \tau} = \text{div}(k \cdot \text{grad}T) \quad (3)$$

式 (3) 为铸坯凝固过程的控制方程. 对于矩形断面的二维问题, 式 (3) 可简化为:

$$\rho C_e \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4)$$

式中: C_e ——等效比热, 即:

$$C_e = \begin{cases} C_l & T > T_e \\ C(T) - L \frac{\partial f_s}{\partial T} & T_s \leq T \leq T_l \\ C_s & T < T_s \end{cases} \quad (5)$$

C_l —液相比热, $\text{J}/\text{kg} \cdot \text{C}$; C_s —固相比热, $\text{J}/\text{kg} \cdot \text{C}$; T_l —液相线温度, C ; T_s —固相线温度 C . 若固相率和温度的关系已知, 则结合一定的边界条件和初始条件, 便可求得铸坯的温度分布

1.3 初始条件和边界条件

铸坯断面坐标的选取如图 1, 坐标原点选在铸坯拐角处.

初始条件:

$$\tau = 0, \quad T(x, t, 0) = T_M.$$

边界条件:

$$\begin{aligned}
 x = 0 & \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} = q_w(0, y, \tau) \\
 x = \frac{ST}{2} & \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\
 y = 0 & \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} = q_t(x, 0, \tau) \\
 y = \frac{SW}{2} & \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0
 \end{aligned}$$

式中： T_M —浇注温度，C； ST —铸坯厚度，m； SW —铸坯宽度，m； q_w —铸坯宽度方向的表面热流密度 W/m^2 ； q_t —铸坯厚度方向的表面热流密度 W/m^2 。

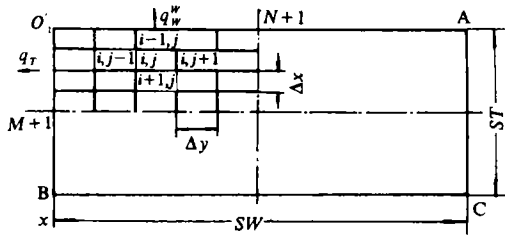


图 1 铸坯断面及网格划分

2 数学模型的有限差分方法

带有相变的二维不稳定态导热问题的数学描述是一个强非线性的二阶偏微分方程。在数值求解时，如何经济有效地求解相应的代数方程无疑是非常重要的。本模型中采用的是交替隐式差分方法。网格划分如图 1 所示， x 方向节点为： $i = 1 \sim M + 1$ ， y 方向节点为： $j = 1 \sim N + 1$ ；用热平衡法可推出各节点的交替隐式格式的差分方程。比如内部节点方程可写为(时间步长 $\Delta\tau$)：前半段时间步长：

$$\begin{aligned}
 & -\frac{k_{i,j-1/2}^{p+1/2}}{\Delta x^2} T_{i,j}^{p+1/2} + \left(\frac{2\rho c^{p+1/2}}{\Delta\tau} + \frac{k_{i,j-1/2}^{p+1/2}}{\Delta x^2} + \frac{k_{i,j+1/2}^{p+1/2}}{\Delta x^2} \right) T_{i,j}^{p+1/2} - \frac{k_{i,j+1/2}^{p+1/2}}{\Delta x^2} T_{i+1,j}^{p+1/2} \\
 & = \frac{k_{i,j-1/2}^p}{\Delta y^2} T_{i,j-1}^p + \left(\frac{2\rho c^p}{\Delta\tau} - \frac{k_{i,j-1/2}^p}{\Delta y^2} - \frac{k_{i,j+1/2}^p}{\Delta y^2} \right) T_{i,j}^p + \frac{k_{i,j+1/2}^p}{\Delta y^2} T_{i,j+1}^p
 \end{aligned}$$

后半段时间步长：

$$\begin{aligned}
 & -\frac{k_{i,j-1/2}^{p+1}}{\Delta y^2} T_{i,j-1}^{p+1} + \left(\frac{2\rho c^{p+1}}{\Delta\tau} + \frac{k_{i,j-1/2}^{p+1}}{\Delta y^2} + \frac{k_{i,j+1/2}^{p+1}}{\Delta y^2} \right) T_{i,j}^{p+1} - \frac{k_{i,j+1/2}^{p+1}}{\Delta y^2} T_{i,j+1}^{p+1} \\
 & = \frac{k_{i,j-1/2}^{p+1/2}}{\Delta x^2} T_{i-1,j}^{p+1/2} + \left(\frac{2\rho c^{p+1/2}}{\Delta\tau} - \frac{k_{i,j-1/2}^{p+1/2}}{\Delta x^2} - \frac{k_{i,j+1/2}^{p+1/2}}{\Delta x^2} \right) T_{i,j}^{p+1/2} + \frac{k_{i,j+1/2}^{p+1/2}}{\Delta x^2} T_{i+1,j}^{p+1/2}
 \end{aligned}$$

式中： $T_{i,j}^p$ — τ 时刻节点 (i, j) 的温度值； $T_{i,j}^{p+1/2}$ — $\tau + \Delta\tau/2$ 时刻节点 (i, j) 的温度值； $k_{i-1/2,j}$ ， $k_{i+1/2,j}$ ， $k_{i,j-1/2}$ ， $k_{i,j+1/2}$ — (i, j) 点为相应 $(i-1, j)$ ， $(i+1, j)$ ， $(i, j-1)$ 和 $(i, j+1)$ 点导热系数的平均值。

铸坯的导热系数 k 是温度的函数。在液相区，考虑到钢液流动和电磁搅拌引起的热对流，导热系数以有效导热系数代替。

由上述差分方程可以看出，交替隐式差分方程中包含着 3 个未知节点温度值，故可用 3 个对角线矩阵算法求解。

3 数模的计算结果与验证

3.1 数模计算结果

连铸传热数学模型计算程序，采用模块化结构，程序用 FORTRAN TT 编制，在 386 计

计算机上运行历时 28 分钟. 图 2 是模型在标准工况下计算得出的连铸过程中铸坯的温度变化及凝固状况.

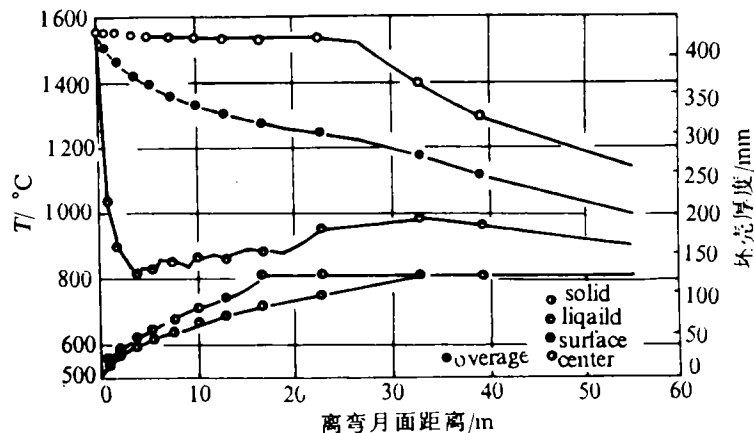


图 2 铸坯的温度变化及凝固状况

$T_M = 1553\text{ }^\circ\text{C}$, $T_1 = 1553\text{ }^\circ\text{C}$, $T_c = 1491\text{ }^\circ\text{C}$, 拉速 $v = 1.4\text{ m/min}$

3.2 数模计算结果的验证

连铸机出口温度测试值与计算值的比较见表 1, 由此说明, 模型的计算结果与实际测试结果较为一致.

表 1 铸机出口温度测定值与计算值的比较

坯号	浇注温度/ $^\circ\text{C}$	拉速/ $\text{m} \cdot \text{min}^{-1}$	冷却方式	出机温度/ $^\circ\text{C}$		
				实测值	计算值	相对误差
129759156	1553	1.40	5	936	958.85	2.38
130013151	1553	1.16	5	928	914.82	1.42
129962152	1568	1.20	5	914	931.45	1.87
129467202	1571	1.14	1	902	933.46	3.37

4 传热数值解法差分格式的比较

在用有限差分法求解传热数学模型时, 交替隐式格式因有效地利用了 3 对角线矩阵算法, 因此它在减轻代数方程求解的工作量的同时, 在算法的稳定性上能较显式差分方法有所改善. 本模型在求解过程中采用的是交替隐式差分方法. 为了观察交替隐式差分方法的优点和得到计算结果, 本模型也用显式差分格式作了一些相同条件下的计算, 以便与交替隐式方法进行比较.

采用显式差分格式时, 控制方程、初始条件及边界条件同 1.2, 1.3 节中所述. 设时间步长为 $\Delta\tau$, 并令 $F = \Delta\tau / \rho C_p$, 则可推出各节点的差分方程. 但时间步长 $\Delta\tau$ 必须遵守稳定性条件:

$$\Delta\tau \leq \rho C_p / 2 \left(\frac{k_{yf}}{\Delta x^2} + \frac{k_{xf}}{\Delta y^2} \right)$$

计算表明, 在相同的计算条件下, 显式格式和交替隐式格式的计算结果非常接近, 作图无法区分, 所以选取两种算法所得的铸坯表面温度和液芯长度值列表比较, 见表 2. 同时, 在计算所需时间上, 两者差别很大. 在同一台 386 计算机上, 显式差分格需 80min, 而交替隐式格式仅需 28min. 从这一点来讲, 交替隐式格式求解铸坯凝固传热数学模型有其独到的优越性.

表 2 不同差分格式计算值比较

二冷区控制点号	显式差分法温度/℃	交替隐式差分温度/℃
1	1036.75	1036.96
3	898.87	900.68
5	817.86	818.95
7	831.86	833.25
9	853.08	854.44
11	867.41	868.68
13	865.49	866.47
出结晶温度/℃	1134.56	1130.00
二冷区终点温度/℃	958.85	959.07
切割点温度/℃	899.41	898.16
液芯长度/m	29.596	29.432

5 结论

连铸板坯的二维凝固传热模型是符合生产实际的, 其计算所得的铸机出口处铸坯表面温度与实测值的最大误差仅为 3.37%. 交替隐式差分格式是一种高效的求解凝固传热数模的有限差分方法, 其解的稳定性及运算速度比显式差分格式更优越.

参考文献

- 1 Hoffken E 等. 第四届国际连铸会议论文集. 中国金属学会连续铸钢学会, 1988. 3~14
- 2 小门纯一等. 铁と钢, 1988 (7): 111~181
- 3 陶文铨. 数值传热学. 西安: 西安交大出版社