

# 变量矩阵算法及一类曲线最佳拟合问题的解

崔健双 高俊山

北京科技大学管理学院, 北京 100083

**摘要** 讨论1种对无约束目标函数采用变量矩阵算法求解最优值的方法. 变量矩阵算法的特点是利用矩阵迭代计算, 收敛速度快, 过程较稳定. 对于一类可逼近模拟曲线的最佳拟合, 可以迭代出符合要求的参数值. 作为较典型的应用实例, 设计1种幅度均衡器. 通过迭代搜索找出满足衰减误差的元件值, 说明曲线拟合达到了预期的效果.

**关键词** 变量矩阵算法; 迭代; 曲线最佳拟合

**分类号** O241.5

变量矩阵算法是最优化算法中1个重要的分支, 其关键是如何修改迭代矩阵, 调整搜索方向, 逐步接近并最终捕获到极值点. 在对目标函数  $F(X)$  进行无约束最优化计算时, 须处理下式:

$$\min F(X) \quad (1)$$

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \text{ (} n \text{ 维欧氏空间)}$$

使该矩阵达到最快收敛结果的算法是具有二级收敛特性的牛顿数值迭代法. 当  $F(X)$  较复杂时, 计算  $F(X)$  的二阶 HASSIAN 导数矩阵  $F''(X)$  的过程相当繁琐, 有时它是一奇异矩阵, 不存在逆阵, 使迭代归于失败. 为了克服牛顿迭代算法的缺陷, 有必要考虑1种既能够避免计算  $F''(X)$  又能够得到与  $F''(X)$  结果近似的简便方法. 这就是本文所要讨论的内容.

## 1 变量矩阵算法的推演过程

对于式(1)所提出的问题, 若采用数值迭代方法获得极值, 基本步骤应该是给定某初始值  $X_0$  和初始搜索方向  $P_0$ , 开始搜索下一个比较接近极值点  $X^*$  的点  $X_1$ , 然后方向修正为  $P_1$ , 开始搜索下一个更接近  $X^*$  的点  $X_2 \dots$ , 直到满足收敛条件为止. 在牛顿数值迭代算法中, 取方向为

$$P_k = -F''(X_k)g_k \quad (2)$$

其中,  $F''(X_k)$  是点  $X_k$  处的二阶 HASSIAN 导数矩阵,  $g_k$  是点  $X_k$  处的一阶导数(梯度)向量.

很显然, 现在需要考虑的是构造一个与  $F''(X_k)$  具有相同阶数的正定对称矩阵  $H_k$ .  $H_k$  计算起来要比  $F''(X_k)$  简单得多, 并且能够逐渐逼近  $F''(X_k^*)$ , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{H_k\} = F''(X^*) \quad (3)$$

设取初始迭代点为  $X_0$ , 迭代矩阵  $H_0 = I$  是单位正定对称矩阵. 取初始搜索方向  $P_0 = -H_0 g_0$ , 沿  $P_0$  搜索得到点  $X_1$ , 计算后得到  $g_1$ . 然后构造  $H_1$ , 希望  $H_1$  正定对称且更加接近极值点  $X^*$  处的 HASSIAN 矩阵. 考虑二次目标函数的情形, 对于非二次函数可以利用在点  $X_k$  处展开成二

# 变量矩阵算法及一类曲线最佳拟合问题的解

崔健双 高俊山

北京科技大学管理学院, 北京 100083

**摘要** 讨论1种对无约束目标函数采用变量矩阵算法求解最优值的方法.变量矩阵算法的特点是利用矩阵迭代计算,收敛速度快,过程较稳定.对于一类可逼近模拟曲线的最佳拟合,可以迭代出符合要求的参数值.作为较典型的应用实例,设计1种幅度均衡器.通过迭代搜索找出满足衰减误差的元件值,说明曲线拟合达到了预期的效果.

**关键词** 变量矩阵算法;迭代;曲线最佳拟合

**分类号** O241.5

变量矩阵算法是最优化算法中1个重要的分支,其关键是如何修改迭代矩阵,调整搜索方向,逐步接近并最终捕获到极值点.在对目标函数  $F(X)$  进行无约束最优化计算时,须处理下式:

$$\min F(X) \tag{1}$$

$$X(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \text{ (} n \text{ 维欧氏空间)}$$

使该矩阵达到最快收敛结果的算法是具有二级收敛特性的牛顿数值迭代法.当  $F(X)$  较复杂时,计算  $F(X)$  的二阶 HASSIAN 导数矩阵  $F''(X)$  的过程相当繁琐,有时它是一奇异矩阵,不存在逆阵,使迭代归于失败.为了克服牛顿迭代算法的缺陷,有必要考虑1种既能够避免计算  $F''(X)$  又能够得到与  $F''(X)$  结果近似的简便方法.这就是本文所要讨论的内容.

## 1 变量矩阵算法的推演过程

对于式(1)所提出的问题,若采用数值迭代方法获得极值,基本步骤应该是给定某初始值  $X_0$  和初始搜索方向  $P_0$ ,开始搜索下一个比较接近极值点  $X^*$  的点  $X_1$ ,然后方向修正为  $P_1$ ,开始搜索下一个更接近  $X^*$  的点  $X_2 \dots$ ,直到满足收敛条件为止.在牛顿数值迭代算法中,取方向为

$$P_k = -F''(X_k)g_k \tag{2}$$

其中,  $F''(X_k)$  是点  $X_k$  处的二阶 HASSIAN 导数矩阵,  $g_k$  是点  $X_k$  处的一阶导数(梯度)向量.

很显然,现在需要考虑的是构造一个与  $F''(X_k)$  具有相同阶数的正定对称矩阵  $H_k, H_k$  计算起来要比  $F''(X_k)$  简单得多,并且能够逐渐逼近  $F''(X_k^*)$ , 即

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{H_k\} = F''(X^*) \tag{3}$$

设取初始迭代点为  $X_0$ , 迭代矩阵  $H_0=I$  是单位正定对称矩阵.取初始搜索方向  $P_0 = -H_0g_0$ , 沿  $P_0$  搜索得到点  $X_1$ , 计算后得到  $g_1$ . 然后构造  $H_1$ , 希望  $H_1$  正定对称且更加接近极值点  $X^*$  处的 HASSIAN 矩阵.考虑二次目标函数的情形,对于非二次函数可以利用在点  $X_k$  处展开成二

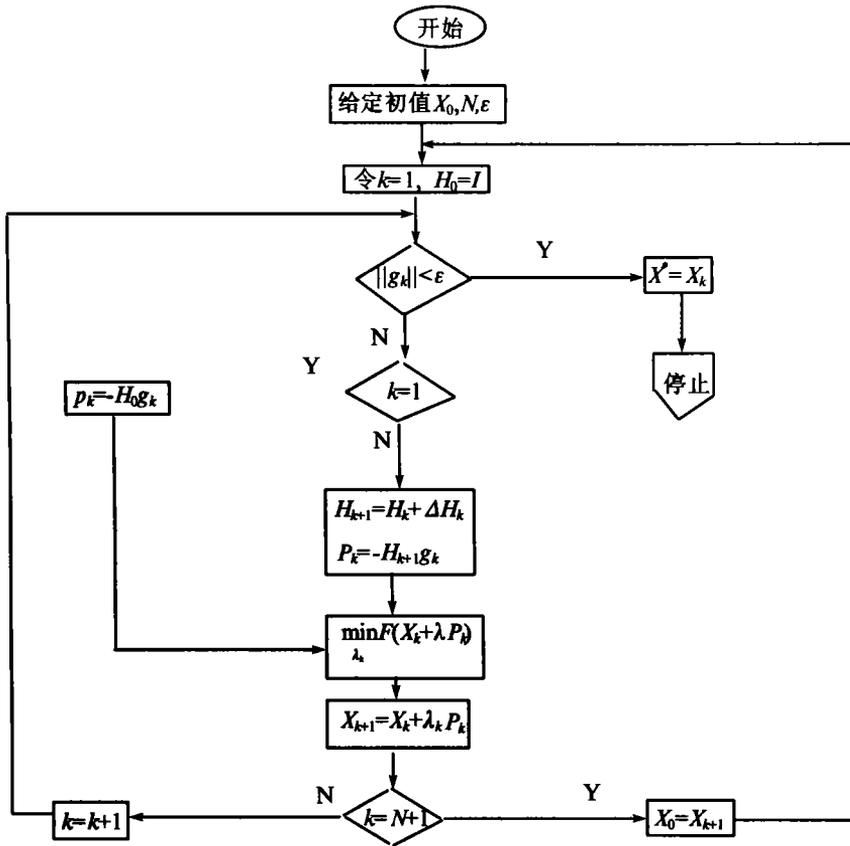


图1 变量矩阵算法流程图

行校正. 图2示出了其常用结构. 其中  $Z_{22}$  和  $Z_{11}$  相对于  $R_0^2$  互为倒量, 通常只须计算出  $Z_{11}$  的元件值,  $Z_{22}$  可通过倒量关系获得. 桥T型均衡器的均衡原理是: 其幅频特性曲线  $b_1$  与所要均衡系统的幅频特性曲线  $b_2$  具有相反的特性, 使得合成后的曲线  $b_3$  呈水平幅度, 满足无畸变传输的条件 (见图3).

设计技术要求如下: (1) 工作频率 12~300 kHz; (2) 负载电阻  $R_0=150 \Omega$ ; (3) 最小衰耗  $b < 0.1 N_{cp}$ ; (4) 各点误差  $< 0.01 N_{cp}$ ; (5) 电路结构采用不平衡式; (6) 线路各取样点衰耗频率数值见表 1.

根据技术要求条件, 拟采用四元件电路结构. 图2中  $Z_{11}$  二端网络可以设计如图4所示.

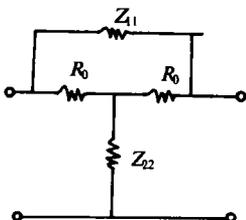


图2 桥T型均衡器常用结构

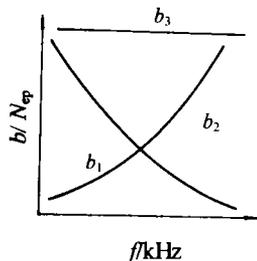


图3 幅频曲线均衡原理

表1 线路各点衰耗频率表

$f/\text{kHz}$	12	20	50	80	100	150	200	220	250	280	300
$b_0/N_{\infty}$	1.415 9	1.3913	1.2273	1.0257	0.8980	0.628 4	0.4158	0.3383	0.217 7	0.072 8	0.017 4

电路中元件是按归一化频率  $f_i=100 \text{ kHz}$  归一化后的值. 利用该网络  $0\sim\Omega_0$  段的幅频特性 (参见图 5) 来逼近设计曲线. 电路传输衰减为

$$b_i = (1/2)\ln|1 + Z_{11}| = \ln[r_{11}^2 + x_{11}^2(1 + r_{11})^2]/(r_{11}^2 + x_{11}^2),$$

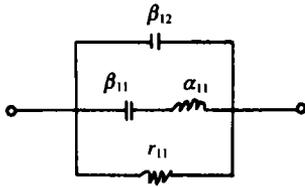


图4  $Z_{11}$  二端网络元件归一化图

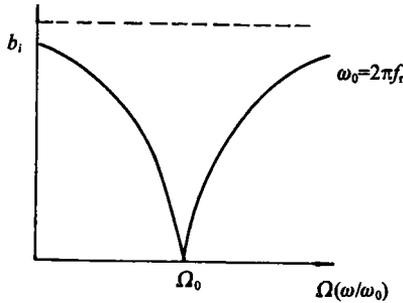


图5 图4结构电路的幅频特性

其中,  $Z_{11}$  是归一化二端网络  $Z_{11}$  的阻抗, 由  $r_{11}$  并联  $x_{11}$  构成.

令  $x_1 = r_{11}$ ,  $x_2 = \alpha_{11}$ ,  $x_3 = -\beta_{11}$ ,  $x_4 = \beta_{12}$ , 则

$$b_i = (1/2)\ln\{[\Omega^2 x_1^2(x_3 + x_4 - \Omega^2 x_2 x_3 x_4)^2 + (\Omega^2 x_2 x_4 - 1)^2(1 + x_1)^2]/[\Omega x_2(x_3 + x_4 - \Omega^2 x_2 x_3 x_4)^2 + (\Omega^2 x_2 x_4 - 1)^2]\} \tag{11}$$

取目标函数 
$$\min F(X) = \min \sum_{i=1}^N (b_i - b_{i0})^2 \tag{12}$$

式中,  $\Omega_i$  是按表 1 中给定的各频率点处归一化频率值;  $b_{i0}$  是表 1 中各频率点处的标准工作衰减;  $N$  是取样频率点数 (此处为 11).

把(11)代入式(12), 对于变量  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , 计算出  $F(X)$  的一阶偏导数式  $F'(x_1), F'(x_2), F'(x_3), F'(x_4)$ . 将它们编入变量矩阵算法的计算机程序中, 输入原始数据, 设定初值为  $X_0 = (5, 5, 5, 5)^T$ , 精度  $\epsilon = 1 \times 10^{-8}$ . 经过  $k=149$  次迭代得到

$$\min F(X^*) = 2.26 \times 10^{-10}, X^* = (3.18, 1.23, 0.0915, 0.37).$$

即  $x_1 = r_{11} = 3.18; x_2 = \alpha_{11} = 1.23; x_3 = \beta_{11} = 0.0915; x_4 = \beta_{12} = 0.37$ , 得到元件值为  $R = 470 \Omega, C_1 = 970 \text{ pF}, C_2 = 3940 \text{ pF}, L_1 = 290 \mu\text{H}$ .

### 3 结论

变量矩阵算法拥有一系列分支, 它适合于对无约束非线性目标函数的最优化搜索, 在计算机上采用各种常用语言如 BASIC, FORTRAN, 或 C 编程均可实现. 该算法不要求精确的一维搜索步长, 实现起来简单实用. 每当搜索效果减低以后, 算法中的变量矩阵可以人为置成单位正定对称矩阵, 重新开始新一轮搜索, 但此时已经更加接近极值点. 由于搜索是在全数据域进行的, 当初值严重偏离实际极值点时, 有可能发散. 因此给定的变元初值很重要. 同时程序

中可以作一些必要的防范判断. 对均衡器的设计实质上是两条曲线的最佳拟合问题, 利用变量矩阵算法, 比原来由人手工试凑计算方法设计出来的结果, 无论从精度上还是从效率上都有大大的提高.

对于类似曲线拟合, 误差最小化问题, 只要能利用数学式表达出函数曲线, 变量矩阵算法不失为一种较理想的解决方法.

## Variable Matrix Method and Its Application on the Curvilinear Optimal Imitation Problem

*Cui Jianshuang      Gao Junshan*

Management School, UST Beijing, Beijing 100083, China

**ABSTRACT** Some advanced researches on nonlinear unconstrained optimization problems with variable matrix method (VMM) have been discussed. VMM shows performing satisfactorily in convergence rate, precisions, computation time and steadiness. As an application example, the element values of a telecommunication line equalizer are searched out by this method.

**KEY WORDS** variable matrix method, reiterate, curvilinear optimal imitation