DOI:10.13374/j.issn1001-053x.1998.05.002
第20卷 第5期 北京科技大学学报 Vol.20 No.5
1998年 10月 Journal of University of Science and Technology Beijing Oct. 1998

时间序列分形特征的判别

廖 明 张文明 方 湄 冯雅丽
北京科技大学资源工程学院,北京 100083

摘要 研究了判断时间序列是否具有分形特征的几个参数:庞加莱映射、李雅普诺夫指数、关联维数、功率谱及赫斯特指数,分析了它们各自的优缺点.认为:在已知动力学系统时,使用庞加莱映射和李雅普诺夫指数就能准确地判断该时间序列是否分形;在不知道动力学系统时,使用功率谱及赫斯特指数更好些.最后给出了分形在时间序列分析中适用的场合.

关键词 时间序列;分形;混沌
分类号 TH133.33; TH165.3

1 分形与混沌的概念

由于分形本身还没有一个严格的定义,使其在工程应用中存在一些模糊不清的概念.即在什么情况下,时间序列具有分形特征,或者说,什么情况下,可以用分形理论来研究时间序列,这是分形理论应用于时间序列分析首先要解决的问题.分形最基本的特征是自相似性,它在时间序列中的应用是从研究函数图的几何结构开始的.确实,当许多物理现象被绘制成时间的函数图时,就显示了分形的特征,例如大气压强、地震波、股票市场的价格等,至少当记录的数据跨越较长的时间间隔时便是如此[1].从这一点上比较,分形与混沌有着密切的联系.混沌主要讨论非线性动力学系统的不稳定的发散过程,但系统状态在相空间中总是收敛于一定的吸引子,这与分形的生长过程十分相像.如果说混沌主要是研究过程的行为特征,分形则是更注重于吸引子本身的研究.分形和混沌的一致性并非偶然,实质上,混沌吸引子就是分形集,分形集就是那些不稳定轨迹的初始点的集合.在时间序列分析中,说某一过程是分形的,或者说其是混沌的,本质上是一致的[2].但同样,混沌也没有一个严格的定义.人们常用混沌和分形的某些特征来判断一时间序列是否混沌或分形.具体地说,人们多用庞加莱映射和李雅普诺夫指数来判断某一时间序列是否混沌的[2~4],而多用分形维数来判断其是否分形的[3,5,6].在工程中,常见的一类具有分形特征的时间序列是长记忆过程,或称之为1/f噪声,人们多用赫斯特指数或功率谱指数来描述其分形特征[7~11].用这些方法判断时间序列的分形或混沌特征,各有其优缺点.

2 时间序列是否具有分形特征的经验判据

2.1 相空间重构

在时间序列分析中,无论是研究其分形特征或混沌特征,首先要做的是相空间重构.其基

1997-10-30 收稿 廖明 男,25岁,博士生
* 国家自然科学基金资助课题

本思想是：动力学系统中的任一分量的演化都是由与之相互作用的其他分量所决定的.这些相关分量的信息就隐含在任一分量的发展过程中[2].由单一时间序列 $\{X(t)\}$ 重构相空间时，只需将它在某些固定的时间延迟点的值作为新维处理，就得到某个多维空间的一点 $X(t)=(x(t),x(t+\tau),x(t+2\tau),\cdots,x(t+(m-1)\tau))$，重复这一过程，就可产生许多这样的点，然后就可用其他方法来检验这些点是否收敛于一个混沌吸引子上.相空间的维数就是数据序列的时间延迟点的个数 m，而后面提到的时间序列的嵌入维，是指能够完全包容以状态转移构成的吸引子的最小相空间维数.相空间重构的关键在于延迟时间的选择和嵌入维的确定.两者在下面的算法中都需要反复计算，优化选择.文献[5]给出了延迟时间和嵌入维的确定方法.

2.2 庞加莱映射

通常，一个动力系统可以表成 m 维的一阶非线性微分方程组：

$$x=F(x,\lambda)\ ;\qquad x=\{x_1,\cdots,x_m\} \tag{1}$$

随着外部控制参数λ的变化，这些方程组的轨道将出现混沌.其吸引子的庞加莱映射可用下式表示：

$$x(n+1)=G(x(n),\lambda);\ \ x(n)=\{x_1(n),\cdots,x_{m-1}(n)\} \tag{2}$$

式(2)表示系统在 m 维相空间中的轨道和 $(m-1)$ 维超平面的截面，而且产生的点随时间的增加可以表示为 $x(1),x(2),\cdots$等.如果动力系统的相空间轨道是周期的或准周期的，其庞加莱映射是有限点或一条闭曲线；如果动力系统的相空间轨道是混沌的，其庞加莱映射将填充超平面的一个区域[3].图1描述了滑动轴承—转子系统在准周期和混沌状态下的庞加莱映射[7].因此，庞加莱映射常常在已知动力学系统时，作为区分周期、准周期与混沌的判据.在不知道动力学系统时，由单一时间序列绘制庞加莱映射，由于吸引子的相空间重构较困难，时间序列的嵌入维难以确定，人们常常只绘制吸引子的二维庞加莱映射.这时，庞加莱映射一般只给出时间序列相空间轨道的某一截面的直观描述，不能区别混沌和完全随机的运动.

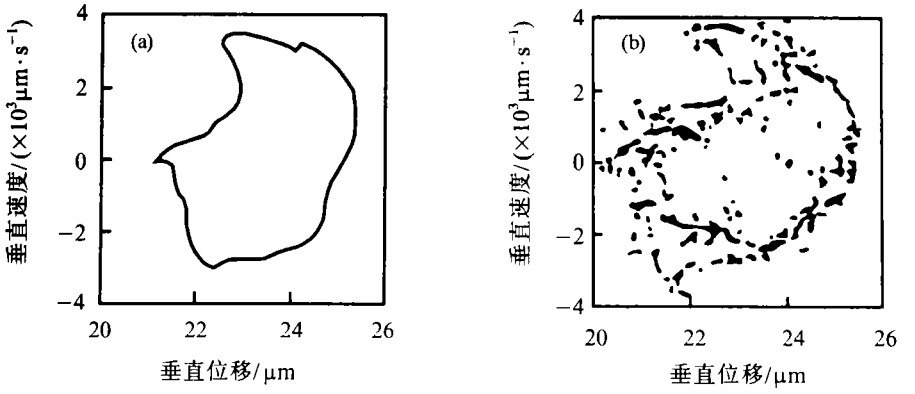

图1 滑动轴承—转子系统运动的庞加莱映射，(a)准周期状态；(b)混沌状态

2.3 李雅普诺夫指数

一个系统是否是混沌的，可以由它的李雅普诺夫指数来确定.如果有正的李雅普诺夫指数，那么这个系统是混沌的.这种方法给出了一个定量的标准.如果已知动力学系统的微分方

程组，计算李雅普诺夫指数，就能得到比较准确的值，从而作出准确的判断．图 2(a)给出了滑动轴承—转子系统在混沌状态下的李雅普诺夫指数 (λ)[7]．

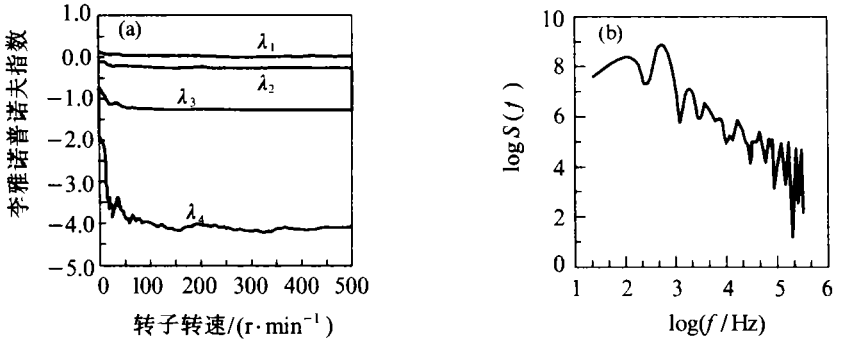

图2 滑动轴承—转子系统混沌状态下的李雅普诺夫指数(a)和双对数谱图(b)

λ_1=0.051；λ_2=−0.22；λ_3=−1.25；λ_4=−4.06

由单一时间序列计算李雅普诺夫指数则较难，文献 [3] 提出的面积演化法是一种近似计算方法．即对于近似平面局域结构的 (+, 0, −)谱的吸引子(要求 $|\lambda_3|>>\lambda_1$)，在重构吸引子中，确定 3 个邻近点 $P(0)$，$Q(0)$，$R(0)$，其中 $P(0)$是吸引子中任意一点，如可取第 1 点 $X_1=\{x_1, x_{1+\tau}, \cdots, x_{1+(m-1)\tau}\}$，$m$ 为嵌入维．$Q(0)$，$R(0)$为 $P(0)$的最近邻点，所得三角形的面积记为 $A(t_0)$，然后按时间序列向前发展得到 $P(0)$在时刻 t_1的新位置 $P(1)$，再寻找 $P(1)$的最近邻点 $Q(1)$，$R(1)$，所得三角形的面积为 $A(t_1)$，重复这一步骤直到所有数据都用到．正的李雅普诺夫指数的估计值为：

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_n - t_0} \sum_{k=1}^{n} \log \frac{A(t_k)}{A(t_{k-1})} \tag{3}$$

式中，t_k为第 k 步代换时间，n 表示代换总步数．同样，由于嵌入维难以确定，只能用平面近似，而且延迟时间的选择常常不当，很难得到较准的李雅普诺夫指数，这种现象尤其在信噪比低时更明显．所以，这种方法往往在已知动力学系统中使用．

2.4 关联维数

在众多的分形维数中，关联维数对吸引子的不均匀性反应敏感，更能反映吸引子的动态结构，而且求关联维数的 G-P 算法较别的方法简单可靠，所以，人们常用关联维数来描述时间序列的分形特征．设某时间序列具有分形特征，其重构相空间得到的向量序列为，$\{X_1, X_2, \cdots, X_N\}$，则关联维数可由下式得到 [6]：

$$D_2 = \lim_{l \to 0} \frac{\ln C(l) + c}{\ln l} \tag{4}$$

其中：c 为常数；$C(l) = (1/N^2) \sum_{i,j=1}^{N} H(l - |X_i - X_j|)$，称为关联积分，$H(x) = \begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x<0 \end{cases}$．

关联维数用以描述吸引子的结构很好，但是当不知某时间序列是否分形时，一般不用关联维数作为分形的判据．因为除了相空间重构困难，无标度区也难以确定．在信噪比低时尤其如此．图 3 为不同信噪比下的混沌时间序列关联积分图 [5]．由图可见，随噪声水平提高，无标度区越来越窄，直至没有．

2.5 赫斯特指数或功率谱指数

由单变量时间序列求分形特征,用得更多的是随机分形理论,常见的是一类长记忆过程,或者称其为1/f噪声[11].因为这一类时间序列在时域内表现为长期相关,即自协方差函数$\gamma(h)$随$h\to\infty$呈负幂指数下降[9]:

$$\gamma(h)\propto Ch^{2H-2},\quad h\to\infty \tag{5}$$

其中,C为常数,H称赫斯特指数.在频域内,表现为有1/f的功率谱$S(f)$:

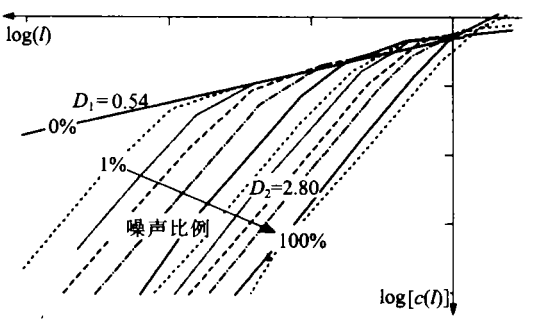

图3 混沌时间序列的关联维数与信噪比的关系

$$S(f)\propto\frac{1}{f^{\alpha}},\quad f\to 0 \tag{6}$$

α称为功率谱指数.在随机分形中,它又称之为自相似过程[10],用下式表示:

$$X(\alpha t)\overset{d}{=}\alpha^{H}X(t) \tag{7}$$

其中,$\alpha>0$,$\overset{d}{=}$表示依概率分布相等;$H\in[0,1]$即Hurst指数.赫斯特指数、功率谱指数与容量维数D_1的关系为:

$$D_1=2-H,\quad D_1=(7-\alpha)/2 \tag{8}$$

由于在工程中得到的具有分形特征的时间序列大都是这类过程,而且求功率谱方便可靠,所以用功率谱是否具有1/f特征来判断该时间序列是否分形就显得直观而且有效,如图2(b)为滑动轴承—转子系统在混沌状态下的双对数谱图.

2.6 几种方法的综合运用

在实际应用中,往往将这几种方法结合起来判断一时间序列是否具有分形特征.通常的做法是:先绘制出时间序列的庞加莱映射,初步判别其是否具有吸引子的特征,然后计算其李雅普诺夫指数和频谱,如果有正的李雅普诺夫指数和宽带的连续谱,则证实了其分形特征,进一步可用关联维数对吸引子进行描述.对于长记忆过程的判别方法是先在不同的采样频率下观察时间序列在时域内是否有自相似性,然后绘制功率谱图,如果符合1/f分布,则验证了它的分形特征,进一步可求功率谱指数或赫斯特指数并用它来描述之.在不知道动力学系统时,用后一种方法更可靠.

3 分形在时间序列分析中的应用范围

将分形用于时间序列分析,必须首先证明该时间序列具有分形特征.尽管由单一时间序列判断其是否有分形特征还有许多困难,但还是有据可循的.

首先,该时间序列应不具有周期的或准周期的特点,即其功率谱图或其他频谱图必须是宽带的连续谱.这就将许多具有明显周期特征的运动排除在外,如轴、轴承、辊、齿轮等一般都是周期运转的,在特定条件下,才会出现混沌.一些文献在研究时间序列的分形特征时,避开这一必要条件,也没有其他有力的佐证,而直接套用那些分形的算法(如G-P算法)求其关联维数或多重分形谱[12],是不可靠的.

其次,既然用分形来研究时间序列,该时间序列就必须是非线性的.就是说,凡是能用线性模型描述的时间序列一般不适用于分形.均值稳定、方差有限的平稳过程均可用ARMA模

型描述，它的特点是自协方差函数$\gamma(h)$随 $h\to\infty$呈负指数下降[9]：

$$\gamma(h)\propto C\cdot\rho^{-h},\quad h\to\infty\quad(\rho>1,C>0)\tag{9}$$

因此也称 ARMA 过程是短记忆的.这类过程一般不适用于分形.而作为长记忆过程的 ARIMA $(0,d,0)$ $(0\le d<0.5)$ 则是一种典型的自相似过程，又称为稳定过程，具有增量稳定、方差无限的特点[7].需注意的是，某些文献将稳定过程(Stable Process)误译为平稳过程(Stationary Process)，给读者造成了较大障碍.

由于作为研究时间序列的分形理论——随机分形还在不断发展、完善，所以，我们不能给出时间序列是否分形的严格判据，但至少我们能用上述的经验判据来验证一个时间序列是否具有分形特征.

参 考 文 献

1 曾文曲，刘世耀.分形几何——数学基础及应用.沈阳：东北大学出版社，1991.199

2 王东生，曹磊.混沌、分形及其应用.合肥：中国科技大学出版社，1995.20

3 李后强.分形理论及其在分子科学中的应用.北京：科学出版社，1992.201

4 陈予述，唐云.非线性动力学中的现代分析方法.北京：科学出版社，1992.153

5 David Logan, Joseph Mathew. Using the Correlation Dimension for Vibration Fault Diagnosis of Rolling Element Bearing. Mechanical System and Signal Processing, 1996, 10(3): 241

6 Grassberger P, Procaccia I. Characterization of Strange Attractors. Physical Review Letters, 1983, 50(5): 346

7 Adiletta G, Guido A R, Rossi C. Chaotic Motions of a Rigid Rotor in Short Journal Bearings. Nonlinear Dynamics, 1996(10): 251

8 Samorodnitsky G, Taqqu M S. Stable Non-Gaussian Process: Stochastic Models with Infinite Variance. New York, London: Chapman and Hall, 1994.56

9 常学将.时间序列分析.北京：高等教育出版社，1993.278

10 Taqqu M S, Teverovsky V. Estimators for Long-Range Dependence: an Empirical Study. Fractals, 1995, 3(4): 785

11 Keshner M S. $1/f$ Noise. Proceedings of the IEEE, 1982, 70(3): 212

12 陈怡然，周轶尘.发动机振动诊断中的多重分形法.内燃机学报，1997, 15(1): 114

Discriminating Fractals in Time Series

Liao Ming Zhang Wenming Fang Mei Feng Yali

Resources Engineering School, UST Beijing, Beijing 100083, China

ABSTRACT Fractal theory is a new method to apply in time series analysis, but how to discriminate fractal time series from non-fractal time series is ambiguous. Several parameters, such as Poincare map, Lyapunov exponent, correlation dimension, power spectrum density and Hurst exponent, are used to recognize if the time series are fractals. The reliabilities of the parameters used above are compared. If the dynamic system is known, it's fit to use the Poincare map and Lyapunov exponent; while if the dynamic system is unknown, it's fit to use the power spectrum density and Hurst exponent. At last, the range of fractals applying in time series analysis is sketched.

KEY WORDS time series analysis; fractals; chaos