

用混沌理论研究筛分过程中 物料的运动规律

孙刚¹⁾ 李世争²⁾ 孙薇³⁾

1)北京科技大学资源工程学院,北京 100083 2)铁道部第十四工程局,保定 071000 3)徐州筛分机械制造有限公司,徐州 221006

摘要 应用非线性数学工具对物料在强化筛中的复杂运动规律性进行了分析,推导出颗粒在强化筛中运动的递推公式.应用混沌分析方法对物料在强化筛中的运动规律进行了数值计算,并用其描述了颗粒的运动特性.结果认为,真实的料群与筛网碰撞和透筛是个十分复杂的过程,影响因素很多,用数学工具对料群碰撞、透筛过程进行精确描述目前尚有困难.

关键词 混沌;筛分;颗粒;料群

分类号 TD921

筛分技术过程中料群的运动是一个非常复杂的过程,具有混沌运动等现象.强化筛的筛分过程是一个非理想物理过程^[1],必须考虑颗粒间的粘结力.因为研究的问题是針對潮湿细粒级粘性物料的筛分,水分和物料的粘性对料群运动产生很大影响,从非线性角度认识料群在强化筛中的运动规律,有可能更接近实际.

1 强化筛运动模型

物料在强化筛筛面上的运动状态可用图1表示.图中 m 表示单颗粒的质量,筛面倾角为 90° (筛面与水平面之间的夹角),振动方向角为 0° (强化筛筛面振动方向与水平面之间的夹角), N 表示筛面对颗粒的法向作用力, G 表示重力, F 表示摩擦力, $-mv$ 表示颗粒的惯性力.

设筛面的运动规律为:

$$s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0);$$

$$\dot{s} = -A \cdot \omega \sin(\omega t + \varphi_0);$$

$$\ddot{s} = -A \cdot \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

式中: A 为筛面的振幅; ω 为筛面振动的角频率; φ_0 为初相位角; s 为筛面的位移; \dot{s} 为筛面运动的速度; \ddot{s} 为筛面运动的加速度.

料群的运动状态与料层厚度有关,即与处理量大小,以及与细泥含量、水分、粘度有关.现仅研究薄料层物料的运动,而后对大处理量、厚料层、物料水分、精度的影响再进行具体分析.

2 颗粒受力分析

物料与筛面碰撞一瞬间,物料在工作面上受力情况如图1所示^[2].由达朗贝尔原理可知:

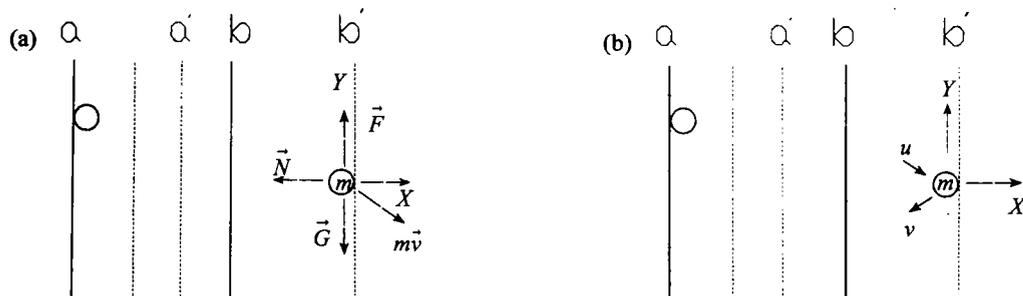


图1 物料在强化筛筛面上的运动状态 (a) 力分布 (b) 速度分布

$$m(\ddot{x} + \dot{s}) = N \cdot \cos\gamma \tag{1}$$

$$m(g - \ddot{y}) = \cos\gamma \cdot Nf \tag{2}$$

式中： γ 为颗粒获得的筛面支撑反力方向与X轴之间的夹角； x 为颗粒在X轴方向的位移； \dot{x} 为颗粒在X轴方向运动的速度； \ddot{x} 为颗粒在X轴方向运动的加速度； y 为颗粒在Y轴方向的位移； \dot{y} 为颗粒在Y轴方向运动的速度； \ddot{y} 为颗粒在Y轴方向运动的加速度； Nf 为物料与筛面间的摩擦力，(f 为摩擦因数)； g 为重力常数。

分析物料受力时暂不考虑碰撞过程中静摩擦力对Y轴方向速度的影响，但碰撞时颗粒的入射角 θ ，与上一次碰撞时离开筛面时的 α_i 角有关。考虑到颗粒形状和筛丝形状对碰撞产生的影响，碰撞后的反弹角 α_{i+1} 不确定，碰撞一瞬间是非完全弹性碰撞，颗粒能量有损失，使得颗粒的反弹速度与入射速度相比在X、Y轴方向上都有变化。(1)在X方向上如果颗粒运动速度小于筛面的运动速度，则运动中的筛面将赋予颗粒能量，推动颗粒运动，加速颗粒的运动速度，使其随筛面运动速度达到最快时离开筛面；而在Y方向上颗粒将受到筛面的摩擦阻力作用，减慢颗粒在Y轴方向的速度。(2)如果颗粒与筛面碰撞后的速度大于筛面返回的速度，则颗粒将冲向另一侧筛面。由于筛丝形状和颗粒形状的影响^[3]，使颗粒与筛丝碰撞一瞬间具有复杂的运动规律性和运动的不确定性。4

从动量原理出发，可得：

$$\begin{cases} m(v_x - \dot{s}) = -bm(u_x - \dot{s}) \\ v_x = -b(u_x - \dot{s}) \\ u_y = bv_y \end{cases} \tag{3}$$

式中： v_x 为颗粒在X轴方向上的反弹速度； v_y 为颗粒在Y轴方向上的反弹速度； u_x 为颗粒在X轴方向上的入射速度； u_y 为颗粒在Y轴方向上的入射速度； b 为碰撞系数。

设空气介质的阻力 R 与 v 的一次方成正比，即：

$$R = -ckv,$$

式中： c 为阻力系数，其大小由实验测得； k 与具体质点几何尺寸、介质密度 ρ 有关的物理量。

3 颗粒运动方程的建立 4

物料在运动时，受空气阻力的作用，根据牛顿第二定律，其飞行过程的运动由下述方程描述：

$$\begin{cases} m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -ck\dot{x} \cdot \cos\theta \\ m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -ck\dot{y} \cdot \sin\theta - mg \\ v_0 = 0, \dot{v}_0 = v_i, x_0 = 0, \dot{x}_0 = u_i \end{cases} \tag{4}$$

令 $\beta = ck/m$ ； $x = v\cos\theta$ ； $y = v\sin\theta$ 代入牛顿第二定律式，则得：

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\beta \frac{dx}{dt} \cos\theta = -\beta \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\beta \frac{dy}{dt} \sin\theta - g = -\beta \frac{dv_y}{dt} - g \end{cases} \tag{5}$$

式中， β 为颗粒与筛丝碰撞后脱离筛面时，颗粒运动的切线方向与X轴的夹角； θ 为颗粒与另一筛面碰撞时，颗粒运动的切线方向与X轴的夹角。

式(5)是颗粒运动的微分方程。解式(5)，得到：

$$\begin{cases} \ln v_x + c_1 = -\beta \cdot t \\ \frac{1}{\beta} \ln(\beta \cdot v_y + g) - c_2 = -t \end{cases} \tag{6}$$

式(6)经运算后得一次阻力，即运动方程式：

$$\begin{cases} x = \frac{v_x}{\beta} (1 - e^{-\beta t}) \\ y = \left(\frac{v_y}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} \right) (1 - e^{-\beta t}) - \frac{g}{\beta} t \end{cases} \tag{7}$$

进一步变换式(7)中的第1式，可得：

$$t = \frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{u_i}{u_i - \beta \cdot x} \right).$$

将 t 代入上式第2式，得到颗粒在一次阻尼时的轨迹方程：

$$y = \left(\frac{v_y}{\beta} + \frac{g}{\beta^2} \right) \frac{\beta}{v_{0x}} x - \frac{g}{\beta^2} \ln \left(\frac{u_i}{u_i - \beta x} \right) \tag{8}$$

由于 $u_i = v_0 \cos\alpha$ ， $v_i = v_0 \sin\alpha$ 考虑到颗粒碰撞筛丝后产生的折射角 α 及惯性力作用，即 $\alpha \neq 0$ (α 为颗粒与筛面碰撞后产生的反弹的方向与X轴间的夹角。 v_0 为颗粒与筛丝碰撞后产生的反弹初速度。)则：

$$y = \tan\alpha x + \frac{gx}{av_0 \cos\alpha} + \frac{g}{\beta^2} \ln \left(1 - \frac{\beta x}{v_0 \cos\alpha} \right) \tag{9}$$

在强化筛正常工作时，认为碰撞时颗粒沿筛面下滑距离很小，可忽略，即 $y_0 = 0$ 。若颗粒沿筛面的法线方向离开筛面，即颗粒与筛丝碰撞后产生的反弹速度比筛面的反回运动速度小，则筛面将追赶上颗粒，颗粒接受了筛面给予的能量，运动到最大速度时脱离筛面。取铅垂方向为Y轴的负方向，则式(9)可得：

$$y = -\frac{gx}{av_0} - \frac{g}{\beta^2} \ln \left(1 - \frac{\beta x}{v_0} \right) \tag{10}$$

在强化筛中，颗粒与筛面碰撞后筛面走过的水平距离是筛距 L 与另一筛面运动的位移

$A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 之和, 颗粒与筛面碰撞后颗粒走过的距离为:

$$x = L + A\cos(\omega t + \varphi_0), \text{ 令 } \varphi_0 = 0, \text{ 则:}$$

$x = L + A\cos\omega t$. 此时颗粒与筛面碰撞后颗粒走过的距离为: $x = \frac{v_x}{\beta}(1 - e^{-\beta t})$.

在同一时间内, 颗粒走过的距离与筛面走过的距离应相等, 则:

$$L + A\cos\omega t = \frac{u_j}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) \quad (11)$$

将式(11)用泰勒级数展开, 并保留前二项(因时间 t 是一个高阶小量), 展开后, 并解得:

$$\begin{cases} t = \frac{-u_j + \sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)}}{A\omega^2} \\ u = v_x = u_j \left[1 + \beta \frac{u_j - \sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)}}{A\omega^2} \right] \\ v = v_j \left[1 + \frac{(v_j\beta + g)(u_j - \sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)})}{v_j\beta A\omega^2} \right] \end{cases} \quad (12)$$

4 颗粒在筛面上的运动规律

设颗粒与 A 筛面碰撞时为 j 状态, 与 B 筛面碰撞时为 $j+1$ 状态. 则:

$$\begin{cases} \bar{u}_{j+1} = u_j \left[1 + \beta \frac{u_j - \sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)}}{A\omega^2} \right] \\ \bar{v}_{j+1} = v_j \left[1 + \frac{(v_j\beta + g)(u_j - \sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)})}{v_j\beta A\omega^2} \right] \\ t_{j+1} = t_j + \frac{\sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)} - u_j}{A\omega^2} \end{cases} \quad (13)$$

和

$$\begin{cases} u_{j+1} - \bar{s} = -b(\bar{u}_{j+1} - \bar{s}) \\ u_{j+1} = - \left\{ (1+b)A\omega \sin\omega t + b u_j \left[1 + \beta \frac{u_j - \sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)}}{A\omega^2} \right] \right\} \\ v_{j+1} = b\bar{v}_{j+1} = b v_j \left[1 + \frac{(v_j\beta + g)(u_j - \sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)})}{v_j\beta A\omega^2} \right] \end{cases} \quad (14)$$

式中: \bar{u}_{j+1} 为第 $j+1$ 状态下颗粒入射速度在 X 方向的投影; u_j 为第 j 状态下颗粒反弹速度在 X 方向的投影; \bar{v}_{j+1} 为第 $j+1$ 状态下颗粒入射速度在 Y 方向的投影; v_j 为第 j 状态下颗粒反弹速度在 Y 方向的投影; t_{j+1} 为第 j 状态到第 $j+1$ 状态下颗粒碰撞所需要的时间; u_{j+1} 为第 $j+1$ 状态下颗粒与筛丝碰撞后反弹速度在 X 方向的投影; v_{j+1} 为第 $j+1$ 状态下颗粒与筛丝碰撞后反弹速度在 Y 方向的投影. 4

筛面运动的速度为:

$$\dot{s} = -A\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \text{ 取 } \varphi_0 = 0, \text{ 则:}$$

$$\dot{s} = -A\omega \cdot \sin\omega t \quad (15)$$

$$\text{令 } \varphi = \omega t, \text{ 则:}$$

$$\varphi_{j+1} = \varphi_j + \frac{\sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)} - u_j}{A\omega^2};$$

$$u_{j+1} = - \left\{ (1+b)A\omega \sin \left[\varphi_j + \frac{\sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)} - u_j}{A\omega^2} \right] \right\} + b u_j \left[1 + \beta \frac{u_j - \sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)}}{A\omega^2} \right]$$

$$v_{j+1} = b v_{j+1} = b v_j \left[1 + \frac{(v_j\beta + g)(u_j - \sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)})}{v_j\beta A\omega^2} \right].$$

现仅考虑 X 方向的运动, 因为筛面只有 X 方向的水平速度和加速度, 颗粒在 Y 方向的运动暂不考虑, 且因为 $\frac{\beta}{A\omega^2}$ 是很小的量, 可忽略则:

$$\begin{cases} \varphi_{j+1} = \varphi_j + \frac{\sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)} - u_j}{A\omega^2} \\ u_{j+1} = - \left\{ (1+b)A\omega \sin \left[\varphi_j + \frac{\sqrt{u_j^2 + 2A\omega^2(L+A)} - u_j}{A\omega^2} \right] \right\} \end{cases} \quad (16)$$

Liapunov 指数是系统运动相轨线的平均发散性或平均收敛性的一种度量. 颗粒在强化筛中的运动系统是离散的, 离散系统的 Liapunov 指数:

$$\text{对于二维迭代: } f: (\varphi, u) \rightarrow (\Phi(\varphi, u), U(\varphi, u)),$$

其 Jacobi 阵为:

$$M(\varphi, u) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial \varphi_j} & \frac{\partial \Phi_{j+1}}{\partial u_j} \\ \frac{\partial U_{j+1}}{\partial \varphi_j} & \frac{\partial U_{j+1}}{\partial u_j} \end{bmatrix}.$$

由初始点 $p_0(\varphi_0, u_0)$ 出发, 得逐次迭代点为:

$$p_1(\varphi_1, u_1), p_2(\varphi_2, u_2), p_3(\varphi_3, u_3), \dots, p_n(\varphi_n, u_n).$$

求出前 $n-1$ 个点处的 Jacobi 矩阵:

$$M_0 = M(\varphi_0, u_0), M_1 = M(\varphi_1, u_1), \dots, M_{n-1} =$$

$$M(\varphi_{n-1}, u_{n-1}).$$

$$\text{则: } A = M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot M_0.$$

设其特征根为 λ_1, λ_2 , 于是:

$$\sigma_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\lambda_i|^n, i = 1, 2 \quad (17)$$

式(17)是其 Liapunov 指数. 根据 σ_i 值的大小即可判断出系统的运动性质, 只要 σ_i 值中其中一个大于零, 则有混沌运动或奇怪吸引子. 由于强化筛的结构特点, 在迭代过程中我们仅考虑颗粒在水平方向运动的速度变化. 弹性碰撞系数分别选取 $b = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ 时的速度变化, 当碰撞系数 $b = 0.6$ 时, 出现混沌运动. 根据实验室试验、现场录相资料 and 实际观察, 料群在强化筛中的运动从整体上可以近似的认为是周期运动, 料群有一定的厚度, 颗粒之间有相互制约, 排在最前面的颗粒与筛网碰撞后即使在水平方向上产生较大

的速度变化, 由于受到后面料群运动的影响, 它也不可能单独继续向前自由运动. 料群运动呈现出局部无序而整体有序、局部不稳定而整体稳定的复杂运动规律性.

5 结论

通过分析强化筛对物料的非线性作用力, 说明了物料在运动过程中存在着复杂的混沌运动. 分析证明混沌运动有利于物料的筛分, 这对认识

物料的运动规律, 解决实际筛分问题, 都具有重要意义.

参考文献

- 1 孙刚. 强化筛筛分理论及设备大型化的研究: [学位论文]. 徐州: 中国矿业大学, 1997
- 2 曾凡. 矿物加工颗粒学. 徐州: 中国矿业大学出版社, 1995
- 3 王东生. 混沌、分形及其应用. 合肥: 中国科技大学出版社, 1995

Motion Law of the Particle Group in the Screening Course with the Chaos Theory

Sun Gang¹⁾, Li Shizheng²⁾, Sun Wei³⁾

1) Resources Engineering School, UST Beijing, Beijing 100083, China 2) the Fourteenth Engineering Bureau, the Department of Railway, Baoding 07100, China 3) Xuzhou Screening Machine Tool Manufacturing Company, Xuzhou 221006, China

ABSTRACT The complex movement regularity of particle group is analysed by using no-linear mathematical tools and the recurrence formula of movement is obtained in intensifying screen. The movement patten of particle group is calculated by using chaotic analyze method and the movement property of particle group is describe. As a result, the collision of particle group and screen is a complex process that is affected by many factors. It is difficult to describe exactly by the mathematical tools at present.

KEY WORDS chaos; screening granula; particle group

[*Journal of University of Science and Technology Beijing(English Edition)*, 1999, 6(1): 8]

Physical Property Influence on Foaming Index of Refining Slag

Lin Di, Ping Wang, Jie Fu

Abstract: The foaming indexes of a group of refining slag were measured. The refining slag with better foaming ability was chosen, its composition(mass fraction in %) is CaO, 53.25; SiO₂, 17.75; MgO, 9; AL₂O₃, 15 and CaF₂, 5. The relationship between slag foaming index and physical properties of the slag was obtained by dimensional analysis, and the expression indicates that viscosity of slag is the most important factor which influences foaming index. The influence sequence of slag composition on foaming index was also obtained as follows:CaF₂→MgO→Al₂O₃→B(CaO/SiO₂).

Key words: secondary refining; submerged arc slag; dimensional analysis