

一种直线四杆机构综合方法

刘卫东 韩建友 谭晓兰

北京科技大学机械工程学院, 北京 100083

摘要 对在特殊条件下混合点直线四杆机构的综合进行了研究,以圆心、圆点坐标为研究混合点直线四杆机构的参数,推导出一般条件下的综合公式并用实例验证了公式的正确性.

关键词 直线; 四杆机构; 综合

分类号 TH 113.22

给定一条直线段 P_1P_3 及其上一点 P_2 , 求得铰链四杆机构连杆上一点 P , 使 P 点满足条件: 依次通过 P_1, P_2, P_3 点; P 点在 P_1, P_3 点的速度方向相同 (P_2 点的速度方向在特殊情况下也相同), 都在给定的直线方向上. 这样获得的直线就是所谓的具有分离点和密切点混合的直线, 即 $P_1P_1-P_2-P_3P_3$ 或 $P_1P_1-P_2P_2-P_3P_3$ 的形式. 综合此类机构就是求两连架杆的固定回转中心 $A_0(x_0, y_0)$ (称为圆心) 和连架杆与连杆的活动铰接点 $A_c(x_c, y_c)$ (称为圆点) 的坐标. 文献[2]给出了在特殊情况下综合此类机构的图解法, 文献[1]给出了在特殊情况下(一个可变参数)综合此类机构的解析方法和公式, 本文给出了一般情况下(三个可变参数)的综合方法和综合公式.

按上述要求, 如果 P 点经过 P_1 点时, 四杆机构的两连架杆平行, 并都垂直于给定的直线方向, 则第一位置的速度方向就能够保证, 那么只要控制了第三点的速度方向同第一位置的速度方向一致, 就可以得到所要求的近似直线机构.

1 综合公式的推导

文献[1,3]知, 有限分离的位置条件公式形式为:

$$A_{j1}(x_0x_c+y_0y_c)+A_{j2}(y_0x_c-x_0y_c)+A_{j3}x_0+A_{j4}y_0+A_{j5}x_c+A_{j6}y_c+A_{j7}=0 \quad (j=2,3) \quad (1)$$

如图 1 所示在该坐标系下, $P_1(0,0), P_2(x_2,0), P_3(x_3,0), x_2, x_3$ 均给定, $P_2(x_2,0)$ 是线段 P_1P_3 的中点.

$A_0(x_{01}, y_{01}), A_c(x_{01}, y_{c1})$ 为圆心点和圆点, 其中 x_{01}, y_{c1} ($y_{c1} > y_{01}$) 为给定的任意值. 该条件下 $A_{j4}=0$, 规定连杆与 x 轴正向的夹角为正, 由文献[1,3]知, 最后有限分离和无限接近两种情况混合可推导出如下方程:

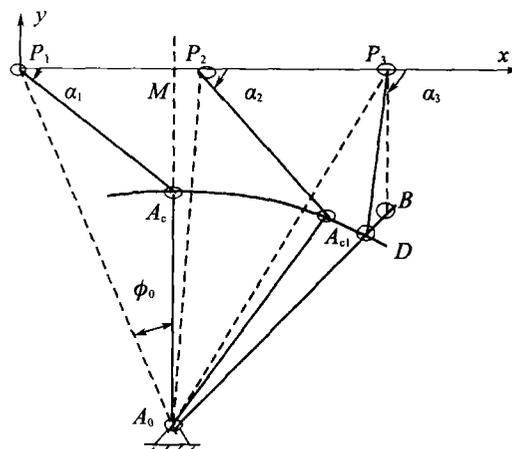


图 1 综合公式推导的坐标系

Fig.1 Coordinate System to deduce synthesizing formulae

$$A_{j1}(x_0+y_0y_c)+A_{j2}(y_0-y_c)x_0+(A_{j3}+A_{j5})x_0+A_{j6}y_c+A_{j7}=0 \quad (j=2,3,4) \quad (2)$$

上式中, 如果取 x_{01}, y_{01} 和 y_c 为未知数, 则方程所含各系数 A_{ji} 均为常数, 其值为以上给定三个变量在第一个位置所表示的角度 θ_{12}, θ_{13} 和 $\dot{\theta}_{12}, \dot{x}_3, \dot{y}_3$ 的函数. 确定这些常数并求解式 (2) 可解出其它圆心点和圆点. 下面分别给出以上各量的值和求解公式.

由设计条件知道, $\dot{y}_3=0, \dot{\theta}_{13}$ 可取任意不为 0 的值. 若 y_{01} 用如图 1 所示的 ϕ_0 参数表示, 则由几何关系可得:

$$y_{01} = -\frac{x_{01}}{\operatorname{tg}\phi_0} \quad (3)$$

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{y_{c1}}{\sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2}}\right) \quad (4)$$

其他几个参数求解过程如下。

1.1 θ_{12} 的确定

如图 1 所示, 在 ΔMP_2A_0 中,

$$\angle MP_2A_0 = \arccos\left(\frac{x_2 - x_{01}}{\sqrt{(x_2 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) \quad (5)$$

在 $\Delta P_2A_cA_0$ 中,

$$\angle A_0P_2A_c = \arccos\left(\frac{x_{01}^2 + (x_2 - x_{01})^2 + 2y_{01}y_{c1}}{2\sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) \quad (6)$$

即

$$\alpha_2 = \arccos\left(\frac{x_2 - x_{01}}{\sqrt{(x_2 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) + \arccos\left(\frac{x_{01}^2 + (x_2 - x_{01})^2 + 2y_{01}y_{c1}}{2\sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) - \pi \quad (7)$$

在 ΔMP_3A_0 中,

$$\angle MP_3A_0 = \arccos\left(\frac{x_3 - x_{01}}{\sqrt{(x_3 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) \quad (8)$$

在 ΔBP_3D 中,

$$\angle BP_3D = \arccos\left(\frac{x_{01}^2 + (x_3 - x_{01})^2 + 2y_{01}y_{c1}}{2\sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) \quad (9)$$

$$\alpha_3 = \angle MP_3A_0 + \angle BP_3D - \pi,$$

即

$$\alpha_3 = \arccos\left(\frac{x_3 - x_{01}}{\sqrt{(x_3 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) + \arccos\left(\frac{x_{01}^2 + (x_3 - x_{01})^2 + 2y_{01}y_{c1}}{2\sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) - \pi \quad (10)$$

因 $\theta_{12} = \alpha_2 - \alpha_1$, 代入 α_1, α_2 的值, 得

$$\theta_{12} = \arccos\left(\frac{x_2 - x_{01}}{\sqrt{(x_2 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) + \arccos\left(\frac{x_{01}^2 + (x_2 - x_{01})^2 + 2y_{01}y_{c1}}{2\sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2} \cdot \sqrt{(x_2 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{y_{c1}}{\sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2}}\right) - \pi \quad (11)$$

1.2 θ_{13} 的确定

因 $\theta_{13} = \alpha_3 - \alpha_1$, 代入 α_1, α_3 的值, 得

$$\theta_{13} = \arccos\left(\frac{x_3 - x_{01}}{\sqrt{(x_3 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) + \arccos\left(\frac{x_{01}^2 + (x_3 - x_{01})^2 + 2y_{01}y_{c1}}{2\sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2} \cdot \sqrt{(x_3 - x_{01})^2 + y_{01}^2}}\right) - \arcsin\left(\frac{y_{c1}}{\sqrt{x_{01}^2 + y_{c1}^2}}\right) - \pi \quad (12)$$

1.3 \dot{x}_3 的确定

在图 1 的坐标系中, 第三位置的速度瞬心必在 P_3 点的垂直线与 A_0D 的延长线的交点 B 上, 这样才能保证第三点与第一点的速度方向相同. 由几何关系可知, D 点是以 $P_3(x_3, 0)$ 为圆心, 以杆长 P_1A_c 为半径画圆与以 $A_0(x_{01}, y_{01})$ 为圆心, 以杆长 A_0A_c 为半径画圆的交点. 令 B 点的坐标为 (x_3, y_d) , D 点的坐标为 (x_d, y_d) , 可得到如下方程组:

$$\begin{cases} (x_d - x_{01})^2 + (y_d - y_{01})^2 = (y_{01} - y_{c1})^2 \\ (x_d - x_3)^2 + y_d^2 = y_{01}^2 + y_{c1}^2 \end{cases} \quad (13)$$

解上述方程组, 得到如下的关系:

$$Ax_d^2 - Bx_d + C = 0$$

式中,

$$A = 4y_{01}^2 + 4(x_{01} - x_3)^2,$$

$$B = -8y_{01}x_3 - 4(x_{01} - x_3)(2x_{01}^2 + 2y_{c1}y_{01} - x_3^2),$$

$$C = 4y_{01}^2x_3^2 - 4y_{01}^2x_{01}^2 - 4y_{01}^2y_{c1}^2 + (2x_{01}^2 + 2y_{c1}y_{01} - x_3^2)^2$$

因此有

$$x_{d1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

当 $B^2 - 4AC \geq 0$ 时 x_d 有意义. 根据 P 点顺序通过 P_1, P_2, P_3 点的条件, x_d 应取 “+” 号. 经计算, 取

$$x_d = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (14)$$

把式(14)代入式(13), 求得

$$y_d = \frac{1}{2y_{01}}[-2(x_{01} - x_3)x_d + (2x_{01}^2 + 2y_{c1}y_{01} - x_3^2)] \quad (15)$$

$B(x_3, y_d)$ 点是过 P_3 点的垂线与线段 A_0D 延长线的交点, 直线 A_0D 的方程为:

$$y = \frac{y_d - y_{01}}{x_d - x_{01}} \cdot x + \frac{y_{01}x_d - y_d x_{01}}{x_d - x_{01}} \quad (16)$$

把 B 点的横坐标 x_3 代入式(15), 经计算, 取

$$y_b = \frac{y_d - y_{01}}{x_d - x_{01}} \cdot x_3 + \frac{y_{01}x_d - y_d x_{01}}{x_d - x_{01}} \quad (17)$$

因 \dot{x}_3 是 P_3 点的线速度, 因此必有:

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta}_{13}y_b \quad (18)$$

至此, 方程组(2)中涉及到的五个参数都已求出, 代入方程组(1)求解出全部系数 A_{μ} , 就可以求出两连架杆的固定回转中心 $A_0(x_0, y_0)$ 和连架杆与连杆的活动铰接点 $A_c(x_c, y_c)$ 的坐标, 其求解过程如同文献[1]. 最后得到一个一元二次方程, 因此还可以求得两个圆心点和圆点, 将它们与给定的第一组值两两组合, 即可得到三个满足条件的铰链四杆机构.

2 综合示例

为了验证综合公式的正确性, 本文用 Microsoft VC++ 6.0 编制了四杆机构综合软件, 对可能综合出的各种机构进行了探索与研究, 得出一批性能良好的直线机构^[4], 证明了本文综合方法的可行性及综合公式的正确性.

下面给出综合得到的两组机构. 令 $P_1(0, 0), P_2(20, 0), P_3(40, 0), P_4(20, 0)$ 是线段 P_1P_3 的中点. 以 $\varphi_0 = 15^\circ, x_{01} = 18, y_{c1} = 10$ 和 $\varphi_0 = 45^\circ, x_{01} = 20, y_{c1} = 15$ 为例, 综合所得四杆机构及连杆曲线如图 2 和图 3 所示. 曲线 1 为机构 1($A_0A_cB_cB_{01}$) 对应的曲线; 曲线 2 为机构 2($A_0A_cB_cB_{02}$) 对应的曲线; 曲线 3 为机构 3($B_{02}B_cB_cB_{01}$) 的对应的曲线. 其各坐标点的值列于表 1.

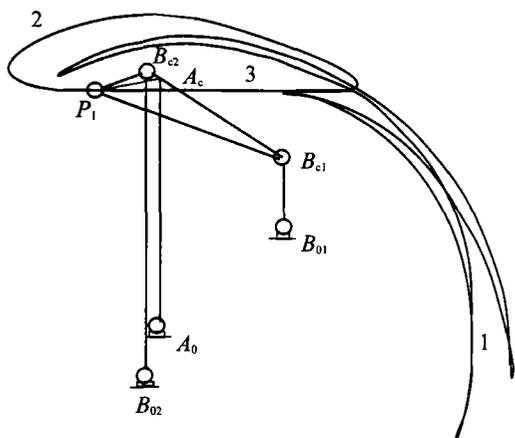


图2 $\varphi_0 = 15^\circ, x_{01} = 18, y_{c11} = 10$

Fig.2 $\varphi_0 = 15^\circ, x_{01} = 18, y_{c11} = 10$

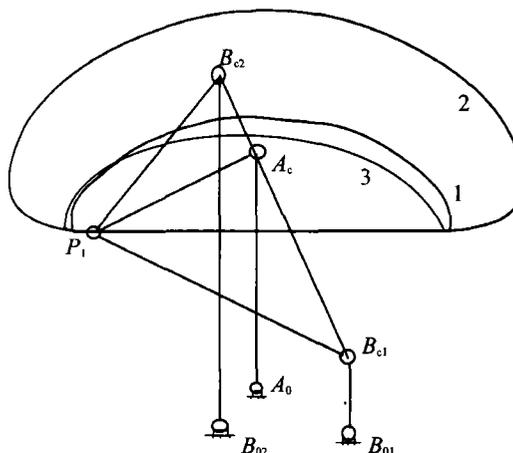


图3 $\varphi_0 = 45^\circ, x_{01} = 20, y_{c11} = 15$

Fig.3 $\varphi_0 = 45^\circ, x_{01} = 20, y_{c11} = 15$

表1 综合所得机构各点的坐标

Table 1 Coordinate Points for synthesized mechanism

项目	A_0	A_c	B_{01}	B_{c1}	B_{02}	B_{c2}
图2	18.00, -67.18	18.00, 10.00	50.11, -35.71	50.11, -12.77	25.58, -47.71	25.58, 4.60
图3	20.00, -20.00	20.00, 15.00	32.50, -26.41	32.50, -15.61	18.00, -22.21	18.00, 19.90

参考文献

1 韩建友, 赵慧设. λ 型铰链四杆近似直线机构综合解析法 [J]. 北京科技大学学报, 1999, 21(1): 72
 2 Dijkstra E A, Smalls A T J M. λ -formed 4-bar linkages set in a translation-position to design mechanisms ap-

proximating a straight line [J]. Mech Mach Theory, 1996, 31(8): 1033

3 韩建友. 高等机构学[M]. 北京: 北京科技大学, 1999.

4 刘卫东. 一种铰链四杆直线机构尺寸域及软件研究 [D]. 北京: 北京科技大学, 2002

Synthesis Method of One Kind of Four-Bar Straight-Line Linkage

LIU Weidong, HAN Jianyou, TAN Xiaolan

Mechanical Engineering School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

ABSTRACT Based on the synthesis theory concerning the mixed point straight-line four-bar linkage in the special condition, a research method with the circle center and circle point as parameters is proposed. Synthesizing formulae of three parameters in the common condition are derived and a few illustrated examples are presented.

KEY WORDS straight-line; four-bar linkage; synthesis