

用同伦分析方法求解具有抽吸喷注的运动延伸表面上流动问题

宋毅¹⁾ 郑连存¹⁾ 张欣欣²⁾

1) 北京科技大学应用科学学院, 北京 100083 2) 北京科技大学机械工程学院, 北京 100083

摘要 研究了具有抽吸喷注的多孔介质延伸表面上二维稳态层流的流动问题. 用一种解析的方法——同伦分析方法——求得了该流动问题的相似解. 给出了量纲为一的速度分布以及在不同渗透参数情况下壁摩擦系数的变化.

关键词 边界层; 延伸表面; 抽吸; 喷注; 非线性; 同伦分析方法

分类号 O 175.1

连续运动、延伸表面边界层问题出现在大量自然现象和工业制造工艺中, 如在热轧、拔丝、玻璃纤维和造纸、塑料薄膜拉伸、金属和聚合物挤出等领域中, 对于这些问题的研究引起了广大科学家和工程技术人员的广泛关注. 伴随着 Sakiadis^[1-2] 先驱性的工作, 人们在对流体绕流具有连续性延伸移动表面的边界层问题的研究上取得了许多进展. 在不少文献中, 用延伸速度、温度或流量分布的变化来描述热量和动量的传输过程的模型.

1 边界层控制方程

考虑二维稳态层流流过渗透系数为 k 的多孔介质延伸表面, 且延伸表面以初速度 u_0 沿 x 轴向运动. 沿 x 轴的两个大小相等、方向相反的力使得延伸表面上原点固定, y 轴垂直于壁面. 层流边界层控制方程组^[3]为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu_e}{k} u \quad (2)$$

边界条件为:

$$y=0, \quad u = u_0 x, \quad v = \pm v_w, \quad y \rightarrow \infty, \quad u = 0, \quad (3)$$

其中 u 和 v 分别是 x 轴和 y 轴上的速度分量, k 是多孔介质的渗透参数, ρ 是密度, μ 是粘性系

数, μ_e 是有效粘度, v_w 是渗流速度. 选择合适的流函数 $\psi(x, y)$, 使其满足

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

引入相似变换^[3]:

$$\eta = \sqrt{\frac{u_0 \rho}{\mu}} y, \quad \psi(x, y) = \sqrt{\frac{\mu u_0}{\rho}} x f(\eta),$$

得到如下的非线性常微分方程:

$$f'''(\eta) + f(\eta)f''(\eta) - f'(\eta)^2 - k_1 f'(\eta) = 0 \quad (4)$$

$$f(0) = c, \quad f'(0) = 1, \quad f'(+\infty) = 0 \quad (5)$$

其中 $k_1 = \frac{\mu_e}{u_0 \rho k}$ 为渗透参数, $c = \pm v_w \sqrt{\frac{\rho}{\mu u_0}}$ 为抽吸喷注参数, $f(\eta)$ 表示量纲为一的流函数.

2 同伦分析方法求解

2.1 零阶变形方程

下面用同伦分析方法^[4-7]求解非线性方程(4), (5). 根据边界条件(5)可以选择

$$f_0(\eta) = c + 1 - \exp(-\eta)$$

作为方程(4)的初始解. 当 $c = -k_1$ 时, 初始解 $f_0(\eta)$ 就是方程(4)的解. 根据方程(4)选择辅助线性算子

$$L_t[F(\eta, q)] = \frac{\partial^3 F(\eta, q)}{\partial \eta^3} + 2 \frac{\partial^2 F(\eta, q)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial F(\eta, q)}{\partial \eta} - 2F(\eta, q),$$

其具有如下性质:

$$L_t[C_1 \exp(\eta) + C_2 \exp(-\eta) + C_3 \exp(-2\eta)] = 0.$$

收稿日期: 2005-04-13 修回日期: 2006-03-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 50476083)和教育部跨世纪人才基金资助项目

作者简介: 宋毅(1981-), 女, 硕士研究生; 郑连存(1957-), 男, 教授, 博士

其中 C_1, C_2 和 C_3 是系数, $F(\eta, q)$ 是关于 η 和 q 的实函数, $q \in [0, 1]$ 是一个嵌入变量. 根据方程 (4), 定义非线性算子

$$N_f[F(\eta, q)] = \frac{\partial^3 F(\eta, q)}{\partial \eta^3} + F(\eta, q) \frac{\partial^2 F(\eta, q)}{\partial \eta^2} - \left[\frac{\partial F(\eta, q)}{\partial \eta} \right]^2 - k_1 \frac{\partial F(\eta, q)}{\partial \eta},$$

构造零阶变形方程:

$$(1-q)L_f[F(\eta, q) - f_0(\eta)] + qN_f[F(\eta, q)] = 0 \quad (6)$$

边界条件为:

$$F(0, q) = c, \quad \left. \frac{\partial F(\eta, q)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 1, \\ \left. \frac{\partial F(\eta, q)}{\partial \eta} \right|_{\eta=\infty} = 0 \quad (7)$$

当 $q=0$ 时, 零阶变形方程 (6), (7) 有解:

$$F(\eta, 0) = f_0(\eta) \quad (8)$$

当 $q=1$ 时, 零阶变形方程 (6), (7) 与原方程 (4), (5) 相同, 有解:

$$F(\eta, 1) = f(\eta) \quad (9)$$

因此, 当嵌入变量 q 从 0 变化到 1 时, $F(\eta, q)$ 从初始解 $f_0(\eta)$ 变化到精确解 $f(\eta)$.

由泰勒公式和式 (8), (9), 得:

$$F(\eta, q) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(\eta) q^m, \text{ 其中}$$

$$f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m F(\eta, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}.$$

若级数在 $q=1$ 处收敛, 则有:

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(\eta) \quad (10)$$

2.2 高阶变形方程

关于 q 微分零阶变形方程 (6), (7) m 次, 除以 $m!$, 再令 $q=0$, 得到 m 阶变形方程:

$$L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = -R_m(\eta) \quad (11)$$

相应的边界条件为:

$$f_m(0) = f'_m(0) = f'_m(\infty) = 0 \quad (12)$$

其中

$$\chi_m = \begin{cases} 0 & m \leq 1 \\ 1 & m \geq 2 \end{cases}$$

$$R_m(\eta) = f''_{m-1}(\eta) + \sum_{n=0}^{m-1} f_n(\eta) f''_{m-1-n}(\eta) - \sum_{n=0}^{m-1} f'_n(\eta) f'_{m-1-n}(\eta) - k_1 f'_{m-1}(\eta) \quad (13)$$

故有一阶渐近解:

$$f(\eta) = c + 1 - \exp(-\eta) + \frac{1}{2}(c + k_1)(1 - \eta) \cdot \exp(-\eta) - \frac{1}{2}(c + k_1)\exp(-2\eta).$$

2.3 收敛定理

定理 如果级数 (10) 收敛, 那么它就是方程 (4), (5) 的精确解.

证明 根据 χ_m 的定义和 m 阶变形方程 (11), 存在正整数 M 使得

$$\sum_{m=1}^M R_m(\eta) = - \sum_{m=1}^M L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = -L_f[f_M(\eta)].$$

如果级数 (10) 收敛, 必然有:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} f_M(\eta) = 0.$$

于是, 由辅助线性算子的定义和上面的两个表达式, 可得:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\eta) = - \lim_{M \rightarrow \infty} L_f[f_M(\eta)] = -L_f[\lim_{M \rightarrow \infty} f_M(\eta)] = 0.$$

将 $R_m(\eta)$ 的定义 (13) 带入上述表达式, 可得:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} R_m(\eta) = \frac{d^3}{d\eta^3} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(\eta) \right] + \left[\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(\eta) \right] \frac{d^2}{d\eta^2} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(\eta) \right] - \frac{d}{d\eta} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(\eta) \right] \frac{d}{d\eta} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(\eta) \right] - k_1 \frac{d}{d\eta} \left[\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(\eta) \right] = 0 \quad (14)$$

由边界条件 (12) 和初始解的定义, 有:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(0) = c, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} f'_m(0) = 1, \quad \sum_{m=0}^{+\infty} f'_m(+\infty) = 0 \quad (15)$$

于是, 由 (14), (15) 可知, 级数 $\sum_{m=0}^{+\infty} f_m(\eta)$ 是方程 (4), (5) 的精确解.

3 结果和讨论

通过相似变换和同伦分析法, 求得该控制方程及其边界条件的相似解. 图 1 给出了量纲为一速度 $f'(\eta)$ 在特殊的渗透参数和抽吸喷注参数情况下的分布. 表 1 给出了壁摩擦系数随着渗透参数的分布. 可见, 壁摩擦系数随着渗透参数的增大而增大.

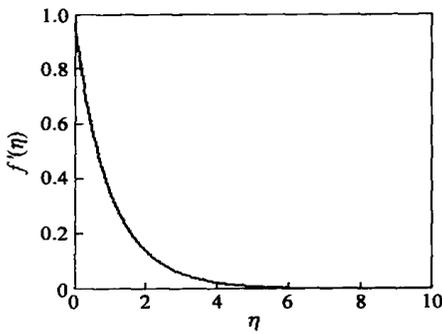


图1 关于 η 的速度函数分布 ($c=-0.3, k_1=0.5$)

Fig.1 Dimensionless velocity profile for $c=-0.3, k_1=0.5$

表1 不同渗透参数和抽吸喷注参数情况下壁摩擦系数的变化
Table 1 Skin friction coefficients at different permeability and injection parameters

$-f''(0)$	$k_1=0$	$k_1=1$	$k_1=2$
$c=-0.1$	0.95	1.45	1.95
$c=0.6$	1.30	1.80	2.30

4 结论

研究了具有抽吸喷注的多孔介质延伸表面上二维稳态层流的流动问题. 通过相似变换和同伦

分析方法, 求得该控制方程及其边界条件的相似解. 分析了量纲为一速度 $f'(\eta)$ 的分布, 以及在不同的渗透参数和抽吸喷注参数情况下壁摩擦系数的变化.

参考文献

- [1] Sakiadis B C. Boundary-layer behavior on a continuous solid surface: I. Boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow. *AICHE J*, 1961, 7: 26
- [2] Sakiadis B C. Boundary-layer behavior on a continuous solid surface: II. Boundary-layer equations for two-dimensional and axisymmetric flow. *AICHE J*, 1961, 7: 221
- [3] Elbashareshy E M A, Bazid M A A. Heat transfer in a porous medium over a stretching surface with internal heat generation and suction or injection. *Appl Math Comput*, 2004, 158: 799
- [4] Liao S J. Beyond Perturbation. New York: CRC Press Company, 2004
- [5] Liao S J, Pop I. Explicit analytic solution for similarity boundary layer equations. *Int J Heat Mass Transfer*, 2004, 47: 75
- [6] Liao S J. On the homotopy analysis method for nonlinear problems. *Appl Math Comput*, 2004, 147: 499
- [7] Xu H. An explicit analytic solution for free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium by means of homotopy analysis method. *Appl Math Comput*, 2004, 158: 433

On the homotopy analysis method for solving the boundary layer flow problem over a stretching surface with suction and injection

SONG Yi¹⁾, ZHENG Liancun¹⁾, ZHANG Xinxin²⁾

1) Applied Science School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

2) Mechanical Engineering School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

ABSTRACT This paper studied two-dimensional steady laminar flow over a porous medium stretching surface with suction or injection. The homotopy analysis method, a kind of analytical method, was applied to solve the problem. The solution presents representative profiles for the dimensionless velocity and the skin friction coefficient at different permeability and injection parameters.

KEY WORDS boundary layer; stretching surface; suction; injection; nonlinear; homotopy analysis method