

# 不连续三状态反馈实现 $n$ 维线性系统混沌反控制

张晓丹 王 震

北京科技大学应用科学学院, 北京 100083

**摘 要** 为拓展混沌控制与混沌同步在保密通信等领域方面的应用, 通过对一类  $n$  维不稳定线性系统添加非连续状态反馈控制项, 实现了不连续三状态线性反馈系统混沌反控制, 并对这一类高维耦合混沌系统的动力学性质进行了理论分析, 给出了定理和证明. 然后分别给出了具有特殊形式的系统和一般系统的例子, 计算机数值模拟及计算 Lyapunov 指数验证这样构造的高维系统确实存在混沌.

**关键词** 线性微分系统; 混沌反控制; 非连续; 耦合系统

**分类号** TP 271<sup>+</sup>.71; O 415.5

自从 20 世纪混沌现象被发现之后, 经过众多科学家、学者深入细致的工作, 混沌理论得到了长足的发展, 混沌控制和反控制的重要性也日益突出, 引起了研究人员的兴趣和广泛关注. 典型的混沌系统有 Lorenz 系统族、Rossler 系统和 Chua 系统等. 大多数的混沌系统都是连续的非线性微分动力系统. 针对非奇异微分方程组构成的动力系统, 理论已经比较完善<sup>[1-3]</sup>. 一些混沌系统也已经能够用电路实现, 而不是局限于数字计算模拟的结果<sup>[4]</sup>, 混沌系统的广义同步特性也开始应用于安全通信领域<sup>[5]</sup>. 而对于线性系统, 则需要各种反馈技术或者延时控制, 使原系统出现混沌现象. 吕金虎等<sup>[6]</sup>研究了通过分段线性开关控制器产生混沌的现象; 陈关荣等<sup>[7-9]</sup>也给出了一种利用反馈方法实现离散系统的混沌产生机制. 在线性系统反控制领域, 前人已经作了一些探索<sup>[10-11]</sup>. 本文在此基础上, 进一步对一类不稳定线性系统, 利用非连续状态反馈控制, 实现三系统耦合混沌反控制, 从而提供新的混沌生成器, 进一步拓宽混沌的研究和应用领域.

## 1 不连续三状态反馈实现线性系统混沌反控制

$n$  维线性微分动力系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{f} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}) \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{f}$  是常向量,  $\mathbf{A}$  至少存在共轭复特征值  $\lambda_{1,2} =$

$\alpha \pm i\beta$  ( $\alpha > 0, \beta \neq 0, i = \sqrt{-1}$ ) 和特征值  $\lambda_3$  ( $\text{Re}(\lambda_3) < 0$ ).

添加控制项  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ , 也就是  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$ , 令

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{k}_1, & g(\mathbf{x}) \geq l \\ 0, & |g(\mathbf{x})| < l, l > 0 \\ \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{k}_2, & g(\mathbf{x}) \leq -l \end{cases} \quad (2)$$

使得  $\mathbf{A} + \mathbf{B}$  的全部特征值均具有负实部. 其中  $g(\mathbf{x})$  为状态分割函数,  $l$  是一正常数. 得到的受控系统实际上是由三个线性系统耦合而成:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) =$$

$$\begin{cases} (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} + (\mathbf{f} + \mathbf{k}_1), & g(\mathbf{x}) \geq l & (3a) \\ \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}, & |g(\mathbf{x})| < l, l > 0 & (3b) \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} + (\mathbf{f} + \mathbf{k}_2), & g(\mathbf{x}) \leq -l & (3c) \end{cases}$$

适当选择  $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, g(\mathbf{x})$  和  $l$ , 使得  $|g(\hat{\mathbf{x}}_1)| < l$ ,  $g(\hat{\mathbf{x}}_2) < l, g(\hat{\mathbf{x}}_3) > -l$ , 其中

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f}, \hat{\mathbf{x}}_2 = -(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{f} + \mathbf{k}_1),$$

$$\hat{\mathbf{x}}_3 = -(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}(\mathbf{f} + \mathbf{k}_2)$$

分别是系统(3)的三个子系统(3b)、(3a)、(3c)的平衡点.

在状态空间  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | -l < g(\mathbf{x}) < l\}$ , 由于  $\mathbf{A}$  具有实部为正的共轭复特征值, 所以子系统(3b)的状态轨线呈螺旋型由中心向外发散, 而在状态空间  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | g(\mathbf{x}) \geq l\}$  或者  $\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n | g(\mathbf{x}) \leq -l\}$ , 系统由外向中心旋转收敛, 系统在时而发散、时而收敛的效果共同影响下, 会产生混沌的特性.

## 2 系统的动力学行为分析

**定理 1** 系统(3)在满足条件  $\text{tr}(\mathbf{A}) < 0$  和  $\text{tr}(\mathbf{A} +$

收稿日期: 2006-08-30 修回日期: 2006-10-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 70271068); 北京科技大学科研基金资助项目(No. 00009010)

作者简介: 张晓丹(1959-), 女, 教授

$B)<0$  时, 是耗散系统.

证明: 设  $V=(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \cdots, \dot{x}_n)$  为状态空间  $X=\mathbf{R}^n$  上的向量函数, 散度为:

$$\nabla V=\sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i}=\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}), & |g(\boldsymbol{x})|<l \\ \operatorname{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}), & \text { 其他 } \end{array}\right.$$

所以,

$$\nabla V<0.$$

对于相空间中初始的体积元  $V(0)$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $V(t)=V(0) e^{(\nabla V) t} \rightarrow 0$ , 即包含系统的轨线最终被限制在相空间内一个测度为 0 的集合内. 证毕.

如果  $\boldsymbol{A}$  不满足条件  $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})<0$ , 虽然无法保证系统总是耗散的, 但是由于控制  $u(\boldsymbol{x})$  的存在, 系统仍然可以被限定在某个区域内, 此时系统仍具有混沌的某些特性.

**定理 2** 系统(3)在满足条件  $|g(\hat{\boldsymbol{x}}_1)|<l, g(\hat{\boldsymbol{x}}_2)<l, g(\hat{\boldsymbol{x}}_3)>-l$ , 且矩阵  $\boldsymbol{A}$  存在特征值  $\lambda_{1,2}=\alpha \pm \mathrm{j} \beta(\alpha>0, \beta \neq 0, \mathrm{j}=\sqrt{-1})$  时, 具有唯一的不稳定平衡点  $\boldsymbol{x}^*=\hat{\boldsymbol{x}}_1=-\boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{f}$ .

证明: 由于  $\hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3$  分别是(3a)、(3c)在不受状态空间限制时的平衡点, 而  $\hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3$  又不在(3a)、(3c)系统运行的空间内(由于  $g(\hat{\boldsymbol{x}}_2)<l, g(\hat{\boldsymbol{x}}_3)>-l$ ); 所以对于系统(3)来说,  $\hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3$  都不是它的平衡点.

$\hat{\boldsymbol{x}}_1$  是(3b)的平衡点, 且  $|g(\hat{\boldsymbol{x}}_1)|<l$ , 所以  $\boldsymbol{x}^*=\hat{\boldsymbol{x}}_1$  是系统(3)唯一的平衡点.

系统(3)在  $\boldsymbol{x}^*$  处的 Jacobi 矩阵就是  $\boldsymbol{A}$ , 而  $\boldsymbol{A}$  存在一个实部大于零的特征值, 因此是不稳定的. 证毕.

若  $g(\hat{\boldsymbol{x}}_2)>l$  或者  $g(\hat{\boldsymbol{x}}_3)<-l$ , 因为  $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$  的全部特征值均具有负实部, 所以系统会在  $\hat{\boldsymbol{x}}_2$  或者  $\hat{\boldsymbol{x}}_3$  附近渐近稳定, 如此则无法达到混沌反控制的目的.

**定理 3** 系统(3)满足定理 2 的条件, 且状态分割函数  $g(\boldsymbol{x})$  满足下列三个条件时, 系统是有界的, 并在三个空间中作往复运动.

- (1)  $g(\boldsymbol{x})$  为连续函数;
- (2) 当  $\|\boldsymbol{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $|g(\boldsymbol{x})| \rightarrow \infty$ ;
- (3) 对于系统  $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}, g(\boldsymbol{x}(t))$  随着时间变化, 从初值  $g(\boldsymbol{x}(0))$  开始上下震荡, 且振幅逐渐加大.

证明: 根据系统的状态, 分情况讨论如下.

(a) 当系统状态  $\boldsymbol{x}$  满足  $g(\boldsymbol{x}) \geq l$  时, 系统的行为是(3a), 如果不考虑系统状态空间的限制, 则系统的轨线会逐渐靠近平衡点  $\hat{\boldsymbol{x}}_2=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{f}+$

$\boldsymbol{k}_1)$ . 而  $g(\boldsymbol{x})$  是连续的, 且  $g(\hat{\boldsymbol{x}}_2)<l$ , 所以系统会在某一时刻  $t_1$  穿过平面  $g(\boldsymbol{x})=l$ , 进而系统转换到(3b).

(b) 当系统状态  $\boldsymbol{x}$  满足  $g(\boldsymbol{x}) \leq -l$  时, 系统的行为是(3c), 不考虑系统状态空间的限制, 则系统的轨线会逐渐靠近平衡点  $\hat{\boldsymbol{x}}_3=-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{k}_2)$ . 而  $g(\boldsymbol{x})$  是连续的, 且  $g(\hat{\boldsymbol{x}}_3)>-l$ , 所以系统会在某一时刻  $t_2$  穿过平面  $g(\boldsymbol{x})=-l$ , 进而系统也转换到(3b).

(c) 当系统状态  $\boldsymbol{x}$  满足  $-l<g(\boldsymbol{x})<l$  时, 系统的行为是(3b), 即  $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}$ , 根据定理 2, 可知系统只有唯一不稳定平衡点  $\boldsymbol{x}^*=\hat{\boldsymbol{x}}_1=-\boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{f}$ . 此时  $\|\boldsymbol{x}\|$  随时间  $t$  增大, 由假设(3), 此时状态空间分割函数  $g(\boldsymbol{x})$  从  $g(\boldsymbol{x}_0)$  开始上下震荡, 且振幅逐渐加大. 若  $g(\boldsymbol{x})$  增大到  $l$ , 则系统的行为回到(a). 若  $g(\boldsymbol{x})$  减小到  $-l$ , 则系统的行为回到(b).

由上面的叙述可知, 系统往复运行在三个状态空间中. 证毕.

若将符号函数  $\operatorname{sgn}(x)$  加入到  $g(\boldsymbol{x})$  中, 则  $g(\boldsymbol{x})$  的条件可能减弱为分段连续函数, 此时仍然可能达到定理 3 中的结果. 关于  $g(\boldsymbol{x})$  中有符号函数的情形的讨论, 参见第 4 部分的数值模拟举例.

### 3 系统构造与数值模拟

根据前面的定理, 简单地令

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cccccccc} \alpha_1 & \beta_1 & & & & & & \\ -\beta_1 & \alpha_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & * \\ & & & \alpha_m & \beta_m & & & \\ & & & -\beta_m & \alpha_m & & & \\ & & & & & \gamma_1 & & \\ & & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \gamma_{n-2 m} \end{array}\right],$$
$$\boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{cccccccc} \theta_1 & & & & & & & \\ & \theta_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & * \\ & & & \theta_m & & & & \\ & & & & \theta_m & & & \\ & & & & & \varphi_1 & & \\ & & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \varphi_{n-2 m} \end{array}\right],$$
$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{T}}=\left[\sigma_1 \quad \sigma_1' \quad \cdots \quad \sigma_m \quad \sigma_m' \quad \tau_1 \quad \cdots \quad \tau_{n-2 m}\right],$$
$$\boldsymbol{f}=\mathbf{0}, \boldsymbol{k}_1=\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_2=-\boldsymbol{k}.$$

则  $A$  的全部特征值为  $\alpha_k \pm i\beta_k (k=1, 2, \dots, m)$  和  $\gamma_l$  ( $l=1, 2, \dots, n-2m$ ), 其中至少存在一个  $\alpha_k > 0$ , 及  $\gamma_l < 0$  或者  $\alpha_j < 0$ .  $A+B$  的全部特征值为  $(\theta_k + \alpha_k) \pm i\beta_k (k=1, 2, \dots, m)$  和  $(\gamma_l + \varphi_l) (l=1, 2, \dots, n-2m)$

要求

$$\theta_i \begin{cases} =0 & \alpha_i < 0 \\ < -\alpha_i & \text{其他} \end{cases}, \varphi_i \begin{cases} =0 & \gamma_i < 0 \\ < -\gamma_i & \text{其他} \end{cases},$$

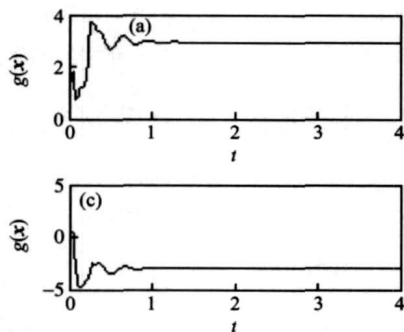
$$\sigma_i, \sigma_i' \begin{cases} =0 & \alpha_i > 0 \\ \neq 0 & \text{其他} \end{cases}, \tau_i \neq 0,$$

则  $\hat{x}_1=0, \hat{x}_2=-(A+B)^{-1}k, \hat{x}_3=(A+B)^{-1}k$ .

$g(x)$  和  $l$  的选择, 要满足  $|g(0)| < l, g(-(A+B)^{-1}k) < l, g((A+B)^{-1}k) > -l$ .

**例 1** 对系统  $\dot{x}=Ax$ , 施加如式(2)定义的控制项  $u(x)$ , 实现混沌反控制, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 20 & -3 & -7 \\ -20 & 2 & 5 & 6 \\ & & 1 & -23 \\ & & & -5 \end{bmatrix}.$$



由前面的叙述, 令

$$B = \begin{bmatrix} -6 & & & \\ & -6 & & \\ & & -10 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix},$$

$$g(x) = \sqrt{|x_1^3 + x_2^3|} \operatorname{sgn}(x_1^3 + x_2^3) + x_4,$$

则  $A+B = \begin{bmatrix} -4 & 20 & -3 & -1 \\ -20 & -4 & 5 & 6 \\ & & -9 & -23 \\ & & & -5 \end{bmatrix}$ , 得到耦合系

统为:

$$\dot{x} = (A+B)x + k, g(x) \geq l \quad (4a)$$

$$\dot{x} = Ax, |g(x)| < l \quad (4b)$$

$$\dot{x} = (A+B)x - k, g(x) \leq -l \quad (4c)$$

可以验证  $\hat{x}_2 = -(A+B)^{-1}k = [-1.0427 \quad -0.1752 \quad -9.1111 \quad 4]^T$ ,  $\hat{x}_3 = (A+B)^{-1}k = -\hat{x}_2$ ,  $g(\hat{x}_2) = 2.9327$ ,  $g(\hat{x}_3) = -2.9327$ . 选取  $l=5$ , 数值计算显示, 状态反馈控制函数  $g(x)$  值随时间  $t$  的变化如图 1 所示. 各变量的时序见图 2. 系统(4)在状态空间中的轨迹如图 3 所示. 经过长

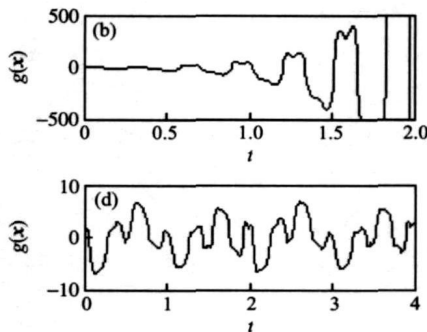


图 1 系统(4)的状态反馈控制函数  $g(x)$  值的变化: (a) 分系统(4a); (b) 分系统(4b); (c) 分系统(4c); (d) 系统(4).

Fig.1 Images of  $t-g(x)$  for (a) Subsystem (4a), (b) Subsystem (4b), (c) Subsystem (4c), and (d) System (4).

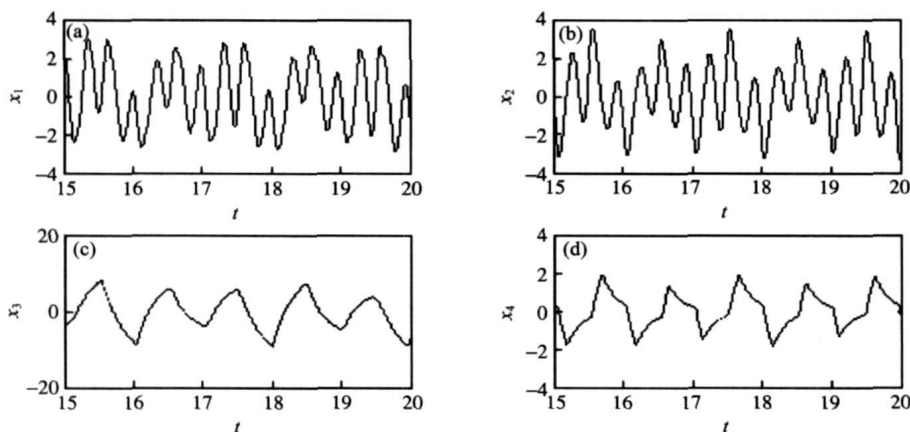


图 2 系统(4)的各变量的时序: (a)  $x_1$ ; (b)  $x_2$ ; (c)  $x_3$ ; (d)  $x_4$

Fig.2 Time series for System (4) of different variables: (a)  $x_1$ ; (b)  $x_2$ ; (c)  $x_3$ ; (d)  $x_4$

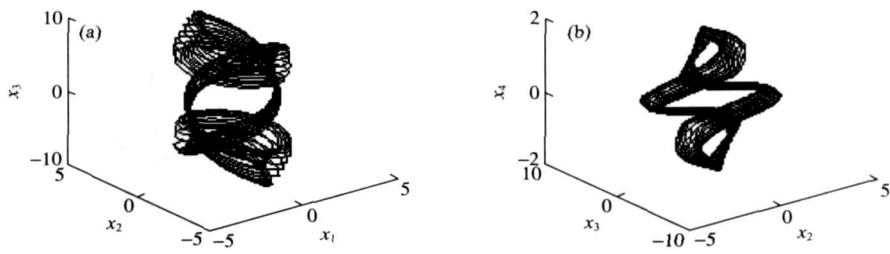


图 3 系统(4)在状态空间中的轨迹: (a) 状态分量  $x_1, x_2, x_3$ ; (b) 状态分量  $x_2, x_3, x_4$

Fig.3 Trajectories of System (4): (a)  $x_1, x_2, x_3$ ; (b)  $x_2, x_3, x_4$ .

时间的数值演算, 最终得到系统(4)的 Lyapunov 指数谱为 $[0.2, 0, -0.2, -8]$ . 说明系统(4)具有混沌的性质. 数值计算 Lyapunov 指数谱的方法来源于文献[12].

例 2 系统(3)中参数选取如下所示:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 20 & & & & \\ -20 & 2 & & & & \\ & & 1 & -23 & & \\ & & & 0.4 & 12 & \\ & & & & -17 & -7 \\ & & & & & -21 & 5 \\ & & & & & & -30 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} -6 & & & & & \\ & -6 & & & & \\ & & -20 & & & \\ & & & -20 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$
$$k^T = [0 \ 0 \ 60 \ 60 \ 60 \ 60 \ 60],$$

所以,

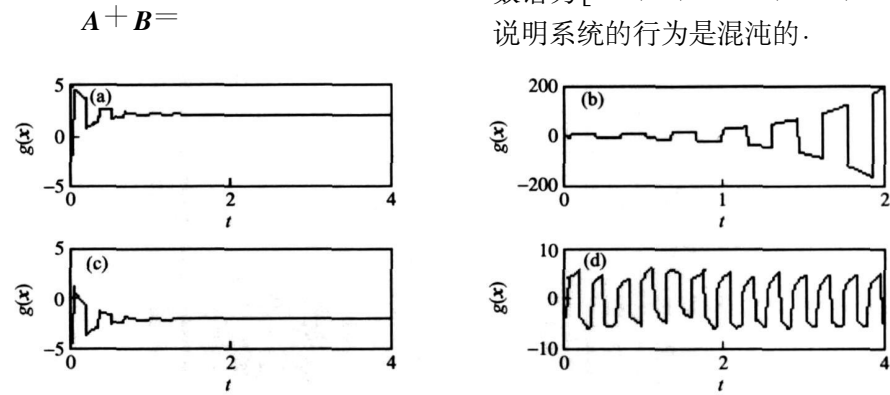


图 4 系统(5)的状态反馈控制函数  $g(x)$  值的变化: (a) 分系统(5a); (b) 分系统(5b); (c) 分系统(5c); (d) 受控系统(5).

Fig.4 Images of  $t-g(x)$  for (a) Subsystem (5a), (b) Subsystem (5b), (c) Subsystem (5c), and (d) System (5).

$$\begin{bmatrix} -4 & 20 & & & & \\ -20 & -4 & & & & \\ & & -19 & -23 & & \\ & & & -19.6 & 12 & \\ & & & & -17 & -7 \\ & & & & & -21 & 5 \\ & & & & & & 30 \end{bmatrix},$$

得到如下动力系统:

$$\dot{x} = (A+B)x + k, g(x) \geq l, \quad (5a)$$

$$\dot{x} = Ax, |g(x)| < l, \quad (5b)$$

$$\dot{x} = (A+B)x - k, g(x) \leq -l. \quad (5c)$$

选择状态分割函数  $g(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \operatorname{sgn}(x_1) + x_5$ , 常数  $l=5$ .

验证对平衡点的要求:  $\hat{x}_2 = -(A+B)^{-1}k = [0 \ 0 \ -2.146 \ 3 \ 4.381 \ 8 \ 2.156 \ 9 \ 3.333 \ 3 \ 2.000 \ 0]^T$ ,  $\hat{x}_3 = (A+B)^{-1}k = -\hat{x}_2$ ,  $g(\hat{x}_2) = 2.156 \ 9 < l=5$ ,  $g(\hat{x}_3) = -2.156 \ 9 > l=5$ . 虽然  $g(x)$  不是连续函数, 但是这里  $g(x)$  分段连续的性质, 仍保证了系统在三个分段空间中自然过渡. 状态反馈控制函数  $g(x)$  值的变化情况如图 4 所示.

系统轨迹如图 5 所示. 经计算得 Lyapunov 指数谱为 $[2.0, 0, -1.0, -6, -12, -20, -31]$ , 说明系统的行为是混沌的.

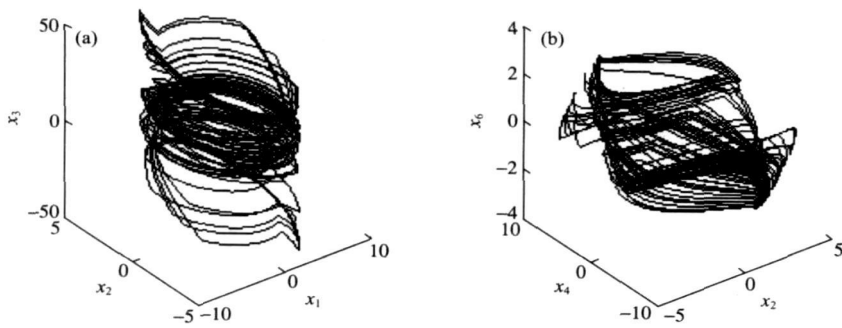


图 5 系统(5)在状态空间中的轨迹:(a) 状态分量  $x_1, x_2, x_3$ ; (b) 状态分量  $x_2, x_4, x_6$ .

Fig-5 Trajectories of System (5): (a)  $x_1, x_2, x_3$ ; (b)  $x_2, x_4, x_6$ .

4 一类系统的混沌反控制

定理 4 若系统(3)已经是混沌系统, 那么对任意的  $n$  维线性微分动力系统

$$\dot{x} = Cx + d, C \in \mathbb{R}^{n \times n}, d \in \mathbb{R}^n \quad (6)$$

如果存在一个可逆矩阵  $P$ , 使得  $A = P^{-1}CP$  且  $d = Pf$ , 则系统(6)可以用相同的方法实现混沌反控制. 得到新的系统为:

$$\dot{x} = Cx + d + \bar{u}(x) =$$

$$\begin{cases} (C + PBP^{-1})x + (d + Pk_1), & g(P^{-1}x) \geq l \\ Cx + d, & |g(P^{-1}x)| < l \\ (C + PBP^{-1})x + (d + Pk_2), & g(P^{-1}x) \leq -l \end{cases} \quad (7)$$

证明: 构造映射  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi(x) = Px$ , 则  $\varphi$  是连续的一一对应, 其逆映射为  $\varphi^{-1}(x) = P^{-1}x$ .

记系统(3)为  $\dot{x} = h_1(x)$ , 系统(7)为  $\dot{x} = h_2(x)$ .

对于任意的  $x \in \mathbb{R}^n$ , 当  $g(x) \geq l$  时,

$$\begin{aligned} \varphi(h_1(x)) &= P(h_1(x)) = \\ P((A + B)x + (f + k_1)) &= \\ P(P^{-1}CP)x + PBx + Pf + Pk_1 &= \\ CPx + PBP^{-1}Px + Pf + Pk_1 &= \\ (C + PBP^{-1})Px + d + Pk_1 &= \\ (C + PBP^{-1})\varphi(x) + d + Pk_1 &= h_2(\varphi(x)) \end{aligned}$$

同理, 当  $|g(x)| < l$  和  $g(x) \leq -l$  时, 都有  $\varphi(h_1(x)) = h_2(\varphi(x))$ .

也就是说, 系统(3)和系统(7)是拓扑共轭的, 因而有相同的动力学性质. 所以系统(7)也是混沌的. 证毕.

根据定理 4, 对一类系统实现混沌反控制.

例 3 系统(3b)中的参数设计为

$$A = \begin{bmatrix} 46 & 20 & -3 & -24 \\ -58 & -18 & 8 & 18 \\ 29 & 0 & 1 & -29 \\ 51 & 50 & -3 & -29 \end{bmatrix}, f = 0,$$

其若当标准型为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -5 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2+20i & \\ & & & 2-20i \end{bmatrix},$$

与例 1 中  $A$  (记作  $A_0$ ) 的若当标准型是相同的. 即这两个矩阵相似, 且  $A_0 = P^{-1}AP$ , 其中

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据定理 4, 选取参数  $B =$

$$\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & 6 \\ -10 & 0 & -10 & 10 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, k = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 30 \\ 20 \end{bmatrix}, \text{状态分割}$$

函数

$$g(x) = \sqrt{|x_1^3 + (2x_1 + x_2 - x_4)^3|} \operatorname{sgn}(x_1^3 + (2x_1 + x_2 - x_4)^3) + x_4 - x_1, l = 5.$$

这些参数给出了一个混沌反控制系统.

$$\dot{x} = (A + B)x + k, g(x) \geq 5 \quad (8a)$$

$$\dot{x} = Ax, -5 < g(x) < 5 \quad (8b)$$

$$\dot{x} = (A + B)x - k, g(x) \leq -5 \quad (8c)$$

混沌轨迹如图 6 所示.

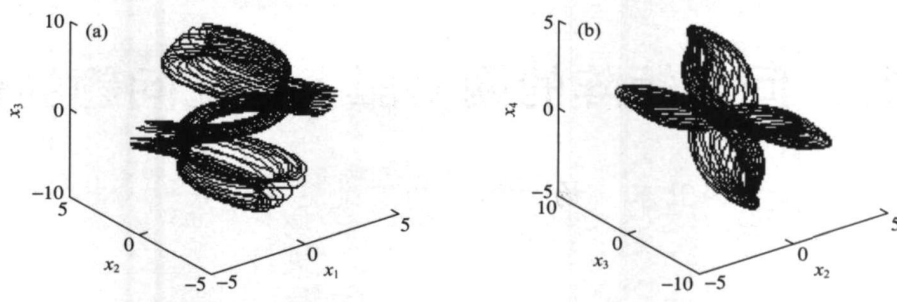


图 6 系统(8)在状态空间中的轨迹: (a) 状态分量  $x_1, x_2, x_3$ ; (b) 状态分量  $x_2, x_3, x_4$ .

Fig.6 Trajectories of System (8): (a)  $x_1, x_2, x_3$ ; (b)  $x_2, x_3, x_4$ .

## 5 结论

通过状态反馈实现了一类  $n$  维线性系统的混沌反控制. 数值模拟结果展示了由不连续的状态反馈所产生的系统复杂现象. 这种混沌与经典 Lorenz 系统有着明显不同的特征, 其中某些性质还有待深入研究.

## 参 考 文 献

[1] Cid J?, Heikkilä S, Pouso R L. Uniqueness and existence results for ordinary differential equations. *J Math Anal Appl*, 2006, 316: 178

[2] 熊金城. 拓扑传递系统中的混沌. *中国科学 A 辑*, 2005, 25(3): 302

[3] Chen G, Dong X. From Chaos to Order: Methodologies, Perspectives and Applications. Singapore: World Scientific Publishing Co., 1998

[4] Zhong G Q, Tang K S, Chen G, et al. Bifurcation analysis and circuit implementation of a simple chaos generator. *Latin Am Ap-*

*pl Res*, 2001, 31: 227

[5] Lu J H, Chen G R, Yang X S. Generating chaos with a switching piecewise-linear controller. *Chaos*, 2002, 12(2): 344

[6] Chen G R, Lai D J. Feedback anticontrol of discrete chaos. *Int J Bifurcation Chaos*, 1998, 8(7): 1585

[7] Wang X F, Chen G R. On feedback anticontrol of discrete chaos. *Int J Bifurcation Chaos*, 1999, 9(7): 1435

[8] Li Y X, Tang W K S, Chen G R. Generating hyperchaos via state feedback control. *Int J Bifurcation Chaos*, 2005, 15(10): 3367

[9] Min L Q, Zhang X D. A generalized synchronization theorem for an array of differential equations with application to secure communication. *Int J Bifurcation Chaos*, 2005, 15(1): 119

[10] 张丽丽, 张晓丹. 四维线性微分系统的混沌反控制理论及应用. *北京科技大学学报*, 2004, 26(6): 673

[11] Zhang X D, Li Z P. Anti-control and generalized synchronization of chaos for a kind of  $n$ -dimensional linear differential system. *Commun Theor Phys*, 2006, 45(3): 461

[12] 张晓丹, 李志萍, 张丽丽. 一类基于奇异值分解的 Lyapunov 指数计算方法. *北京科技大学学报*, 2005, 27(3): 117

## Anti-control of chaos for a kind of $n$ -dimensional linear differential system by three-state discontinuous feedback

ZHANG Xiaodan, WANG Zhen

Applied Science School, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

**ABSTRACT** To expand the application of chaos control and synchronization in the field of secure communication, anti-control of chaos for three-state discontinuous linear feedback systems was achieved by adding a feedback control item under discontinuous state to a kind of  $n$ -dimensional unstable linear systems, the basic dynamical behaviors of the chaotic control systems were investigated in detail, and some theorems were given. Numerical simulation and calculating all Lyapunov exponents verify their chaos.

**KEY WORDS** linear differential system; anti-control of chaos; discrete; coupling system