

一类不确定非线性系统的串级主动补偿控制

赵建利[✉] 王京 魏伟

北京科技大学国家高效轧制工程研究中心, 北京 100083

✉ 通信作者, E-mail: jianli791026@yahoo.com.cn

摘要 针对一类具有下三角结构的单输入单输出不确定非线性系统, 研究其稳定控制问题. 提出一种结构简单、收敛速度可控以及抗扰性能良好的基于 Backstepping 方法的串级主动补偿控制策略, 实现了闭环系统的渐近稳定控制. 为解决闭环系统中不确定非线性未知问题, 设计一种新的观测器, 使得这种观测器能够实时跟踪闭环系统的不确定非线性. 通过引入奇异扰动性理论, 给出了闭环系统稳定性分析. 仿真实验结果验证了该控制方法的有效性.

关键词 非线性系统; 渐近稳定; 观测器; 奇异摄动系统; 串级控制

分类号 TP 273

Cascade control with active compensation for a class of uncertain nonlinear system

ZHAO Jian-li[✉], WANG Jing, WEI Wei

National Engineering Research Center of Advanced Rolling, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

✉ Corresponding author, E-mail: jianli791026@yahoo.com.cn

ABSTRACT Stability control for a class of single-input single-output (SISO) uncertain nonlinear system with lower triangular structure was studied. Cascade control with active compensation based on the backstepping approach was proposed. The designed controller, with the characteristics of simple structure, controlled convergence rate and good robustness, achieves the asymptotic stability of a closed-loop system. To solve the uncertainty of the closed-loop system, a new observer was designed to track the uncertainty in time. The stability of the closed-loop system is proved by introducing the singular perturbation theory. Simulation results show the effectiveness of the control method.

KEY WORDS nonlinear systems; asymptotic stability; observers; singularly perturbed systems; cascade control

不确定非线性系统的控制一直为人们所关注, 特别是 Kanellakopoulos 等于 1991 年提出 Backstepping 方法实现参数纯反馈 (PPF)、参数严格反馈 (PSF) 系统的自适应控制后, Backstepping 方法成为人们研究不确定非线性系统控制问题的重要工具^[1-2].

目前, 针对不确定非线性系统的控制问题, 人们利用 Backstepping 方法, 已取得一系列研究成果. 其中, 文献 [3-9] 研究了不确定非线性仿射系统的控制问题, 文献 [10-12] 研究了不确定非线性非仿射系统的控制问题. 在研究不确定非线性仿射系统的控制问题中, 文献 [6] 研究了不确定非线性延迟系

统的稳定控制问题, 文献 [7] 研究了电驱无人驾驶直升机的稳定控制问题. 但是, 这些方法要求系统不确定非线性满足某些已知性条件, 当这些条件不满足时, 应用 Backstepping 方法便失去了效力. 为了解决这一问题, 并且使 Backstepping 方法能够应用于更加广泛的不确定非线性仿射系统, 与其他方法相结合是常用的方法. 为此, 文献 [8] 引入 PI 观测器, 保证电液执行机构跟踪误差具有很好的逼近特性; 文献 [9] 引入模糊逻辑, 设计了模糊观测器, 保证了闭环系统的全局一致渐近稳定及有界性. 在研究不确定非线性非仿射系统的控制问题中, 文献 [10-11] 针对不确定非线性满足有界性的系统,

收稿日期: 2011-02-04

基金项目: 国家高技术研究发展计划资助项目 (2009AA04Z163)

通过设计不光滑或光滑的自适应控制律,实现其闭环系统的稳定控制;文献[2]针对更为广泛的不确定非线性非仿射系统,通过增加幂次积分方法,实现其闭环系统的稳定控制。

值得注意的是,上述这些基于 Backstepping 方法,其控制律设计复杂,需要经过大量的数学推导过程,使得该方法的实用性大大降低。因此,对于不确定非线性系统,设计一种结构简单、参数调节方便、鲁棒性能良好且易于调节的控制器是十分必要的。于是,本文针对一类具有下三角结构的不确定非线性系统,研究其稳定控制问题。首先,针对这类不确定非线性系统,提出一种结构简单、收敛速度可控和抗扰性能良好的基于 Backstepping 方法的串级^[3]主动补偿控制策略,实现了闭环系统的渐近稳定控制。其次,设计一种新的观测器,解决了系统不确定非线性未知问题。最后,结合奇异扰动性理论,给出闭环系统的稳定性分析。通过实例仿真,结果验证了该控制方法的有效性。

1 串级主动补偿控制策略的实现

1.1 问题描述及研究内容

考虑如下具有下三角结构的单输入单输出不确定非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1, \theta), \\ \dot{x}_2 = x_3 + f_2(x_1, x_2, \theta), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \theta), \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) + g(x)u. \end{cases} \quad (1)$$

式中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态; $u \in \mathbb{R}$ 为系统控制输入; $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为由系统未建模动态和时变参数引起的不确定非线性; $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^l$ 为系统不确定参数, Θ 为已知紧集; $g(x)$ 为已知光滑函数, 且对于 $\forall x, g(x) \neq 0$ 。

假设 1 系统状态 x 可测。

假设 2 不确定非线性函数 f_i 满足: (1) Lipschitz 连续且 $f_i(0, \theta) = 0$; (2) 直到二阶偏导数有界。

研究系统(1)稳定控制问题,即通过设计控制输入 u ,使系统(1)在非零初始状态条件下,渐近收敛至平衡点 $x = 0$ 。

1.2 控制算法设计

考虑系统(1),为了实现其渐近稳定控制,提出了一种基于 Backstepping 方法的串级主动补偿控制策略,具体实现过程如下。

首先,考虑第 1 个子系统 $\dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1, \theta)$ 。为了分析方便,令其跟踪给定 $u_0 = 0$,跟踪动态为

$$\dot{x}_1 - \dot{u}_0 = x_2 + f_1(x_1, \theta) - \dot{u}_0. \quad (2)$$

定义 $\eta_1 = f_1 - \dot{u}_0$ 和 $z_1 = x_1 - u_0$,并把 x_2 看作是跟踪系统(2)的虚拟控制输入 u_1 ,并令 u_1 为

$$u_1 = -k_1 z_1 - \eta_1. \quad (3)$$

式中, $k_1 > 0$ 。此时,跟踪系统(2)的闭环运动方程为

$$\dot{z}_1 = -k_1 z_1, \quad (4)$$

实现渐近稳定控制。

其次,考虑第 2 个子系统 $\dot{x}_2 = x_3 + f_2(x_1, x_2, \theta)$,并把 u_1 作为它的跟踪给定,则跟踪动态为

$$\dot{x}_2 - \dot{u}_1 = x_3 + f_2(x_1, x_2, \theta) - \dot{u}_1. \quad (5)$$

定义 $\eta_2 = f_2 - \dot{u}_1$ 和 $z_2 = x_2 - u_1$,并把 x_3 看作跟踪系统(5)的虚拟控制输入 u_2 ,并令 u_2 为

$$u_2 = -k_2 z_2 - \eta_2. \quad (6)$$

式中, $k_2 > 0$ 。此时,跟踪系统(5)的闭环运动方程为

$$\dot{z}_2 = -k_2 z_2, \quad (7)$$

实现渐近稳定控制。依次类推,考虑第 i 个子系统 $\dot{x}_i = x_{i+1} + f_i (i = 2, 3, \dots, n-1)$,使其跟踪给定 u_{i-1} ,则跟踪动态为

$$\dot{x}_i - \dot{u}_{i-1} = x_{i+1} + f_i - \dot{u}_{i-1}. \quad (8)$$

定义 $\eta_i = f_i - \dot{u}_{i-1}$ 和 $z_i = x_i - u_{i-1}$,并把 x_{i+1} 看作是虚拟控制输入 u_i ,并令 u_i 为

$$u_i = -k_i z_i - \eta_i. \quad (9)$$

式中, $k_i > 0$ 。此时,跟踪系统(8)的闭环运动方程为

$$\dot{z}_i = -k_i z_i, \quad (10)$$

实现渐近稳定控制。

最后,考虑第 n 个子系统 $\dot{x}_n = f_n + g(x)u$,使其跟踪给定 u_{n-1} ,跟踪动态方程为

$$\dot{x}_n - \dot{u}_{n-1} = g(x)u + f_n - \dot{u}_{n-1}. \quad (11)$$

定义 $\eta_n = f_n - \dot{u}_{n-1}$ 和 $z_n = x_n - u_{n-1}$,并令 u 为

$$u = (-k_n z_n - \eta_n) / g(x). \quad (12)$$

式中, $k_n > 0$ 。此时,跟踪系统(11)的闭环运动方程为

$$\dot{z}_n = -k_n z_n, \quad (13)$$

实现渐近稳定控制。

由上述实现过程,参考文献[1],可得系统(1)基于 Backstepping 方法串级主动补偿控制策略的结构图如图 1 所示,图中 $C_1, C_2, \dots, C_n$ 为上述各跟踪子系统的控制器。同时,为了保证闭环系统具有良好的稳定性,可根据系统的响应要求调节 $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$,使系统(1)状态 x 渐近收敛至零。

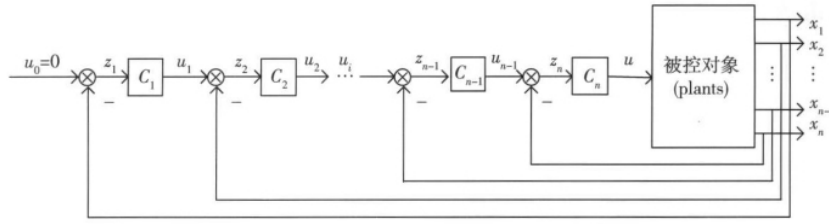


图1 基于 Backstepping 方法的串级主动补偿控制结构图

Fig. 1 Structure chart of cascade control with active compensation based on the backstepping approach

同时,由上述具体实现过程可知,采用基于 Backstepping 方法的串级主动补偿控制策略,系统

(1) 跟踪系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = u_1 + \eta_1, \\ \dot{z}_2 = u_2 + \eta_2, \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = u_{n-1} + \eta_{n-1}, \\ \dot{z}_n = g(x)u + \eta_n, \end{cases} \quad (14)$$

并且在控制律

$$u_i = -k_i z_i - \eta_i \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \quad (15)$$

$$u = (-k_n z_n - \eta_n) / g(x) \quad (16)$$

作用下,闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -k_1 z_1, \\ \dot{z}_2 = -k_2 z_2, \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = -k_{n-1} z_{n-1}, \\ \dot{z}_n = -k_n z_n. \end{cases} \quad (17)$$

式中, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ 为跟踪系统状态(或跟踪误差向量); $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$ 为跟踪系统不确定非线性. 由假设 1 及上述推导过程可知,状态 z 满足可测性条件.

在闭环系统(17)中,由于各闭环子系统渐近稳定,可得闭环系统(17)渐近稳定,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (18)$$

当 $z_1 \rightarrow 0$ 时, $x_1 \rightarrow 0$. 根据假设 2, 可得此时 $f_1 \rightarrow 0$, $u_1 \rightarrow 0$. 进一步,当 $z_2 \rightarrow 0$ 时,可得 $x_2 \rightarrow 0$. 依次类推,可得 $x_3, x_4, \dots, x_n \rightarrow 0$, 即系统(1)实现了渐近稳定控制. 但是,由于 f_i 未知,导致跟踪系统(14)中 η_i 不可测,从而使得式(15)和(16)所示控制律无法实现. 为此,针对跟踪系统(14),设计了一种新的观测器,利用可测量 z_i 对其第 i 个子系统中未知量 η_i 进行实时估计. 然后,利用估计值 $\hat{\eta}_i$, 构建具有动态补偿特性的反馈控制律(15)和(16),使得跟踪系统(14)实现渐近稳定控制,即系统(1)实现渐近稳定控制.

1.3 观测器设计

考虑跟踪系统(14),针对其第 i 个子系统

$$\dot{z}_i = u_i + \eta_i, \quad (19)$$

式中, $i=1, 2, \dots, n-1$. 类似误差微分,令 η_i 的估计值 $\hat{\eta}_i$ 满足

$$\dot{\hat{\eta}}_i = (\alpha_i / \varepsilon^2) (\dot{z}_i - u_i^* - \hat{\eta}_i). \quad (20)$$

由于 $\dot{z}_i$ 未知,可知式(19)无法实现. 根据文献[3],定义 w_i 为

$$w_i = (\varepsilon^2 / \alpha_i) \hat{\eta}_i - z_i. \quad (21)$$

对 w_i 求导,得式(20)的可实现形式为

$$\begin{cases} \dot{w}_i = -u_i^* - (\alpha_i / \varepsilon^2) (w_i + z_i), \\ \dot{\hat{\eta}}_i = (\alpha_i / \varepsilon^2) (w_i + z_i). \end{cases} \quad (22)$$

式中, $\alpha_i > 0$, $\varepsilon > 0$, 且 ε 满足 $\varepsilon \ll 1$; $w_i(0) = -z_i(0)$, $\hat{\eta}_i(0) = 0$; u_i^* 为由 $z_i, \hat{\eta}_i$ 构成的具有动态主动补偿特性的反馈控制律(15),即

$$u_i^* = -k_i z_i - \hat{\eta}_i. \quad (23)$$

同理,针对第 n 个子系统 $\dot{z}_n = g(x)u + \eta_n$, 类似误差微分,令 η_n 的估计值 $\hat{\eta}_n$ 满足

$$\dot{\hat{\eta}}_n = (\alpha_n / \varepsilon^2) (\dot{z}_n - g(x)u^* - \hat{\eta}_n). \quad (24)$$

定义 w_n 为

$$w_n = (\varepsilon^2 / \alpha_n) \hat{\eta}_n - z_n. \quad (25)$$

对 w_n 求导,得式(24)的可实现形式为

$$\begin{cases} \dot{w}_n = -g(x)u^* - (\alpha_n / \varepsilon^2) (w_n + z_n), \\ \dot{\hat{\eta}}_n = (\alpha_n / \varepsilon^2) (w_n + z_n). \end{cases} \quad (26)$$

式中, $\alpha_n > 0$, $w_n(0) = -z_n(0)$, $\hat{\eta}_n(0) = 0$; u^* 为由 $z_n, \hat{\eta}_n$ 构成的具有动态主动补偿特性的反馈控制律(16),即

$$u^* = (-k_n z_n - \hat{\eta}_n) / g(x). \quad (27)$$

由式(22)和(26)可以看出,当 ε 非常小时,观测器反馈增益 α_i / ε^2 ($i=1, 2, \dots, n$) 非常大. 这种观测器的优点为:(1)给闭环系统稳定性分析带来方便;(2)使得其估计值跟踪上闭环系统不确定非线性所需时间是 $O(\varepsilon)$.

1.4 闭环系统稳定性分析

在控制律(23)和(27)作用下,跟踪系统(14)

变为

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -k_1 z_1 + \eta_1 - \hat{\eta}_1, \\ \dot{z}_2 = -k_2 z_2 + \eta_2 - \hat{\eta}_2, \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = -k_{n-1} z_{n-1} + \eta_{n-1} - \hat{\eta}_{n-1}, \\ \dot{z}_n = -k_n z_n + \eta_n - \hat{\eta}_n. \end{cases} \quad (28)$$

定义观测误差为 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)^T$, $\delta_i = \eta_i - \hat{\eta}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 则系统(28)可描述为

$$\dot{z} = Az + \delta. \quad (29)$$

同时,由式(21)和(25)可得

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \dot{\delta}_1 = -\alpha_1 \delta_1 + \varepsilon^2 \dot{\eta}_1, \\ \varepsilon^2 \dot{\delta}_2 = -\alpha_2 \delta_2 + \varepsilon^2 \dot{\eta}_2, \\ \vdots \\ \varepsilon^2 \dot{\delta}_{n-1} = -\alpha_{n-1} \delta_{n-1} + \varepsilon^2 \dot{\eta}_{n-1}, \\ \varepsilon^2 \dot{\delta}_n = -\alpha_n \delta_n + \varepsilon^2 \dot{\eta}_n. \end{cases} \quad (30)$$

即

$$\varepsilon^2 \dot{\delta} = A' \delta + \varepsilon^2 \dot{\eta}. \quad (31)$$

由式(29)和(31)可得,跟踪系统(14)在控制律(23)和(27)作用下,其闭环系统状态方程为

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + \delta, \\ \varepsilon^2 \dot{\delta} = A' \delta + \varepsilon^2 \dot{\eta}. \end{cases} \quad (32)$$

式中, $n \times n$ 矩阵 $A = \text{diag}\{-k_1, -k_2, \dots, -k_n\}$, $n \times n$ 矩阵 $A' = \text{diag}\{-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n\}$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)^T$.

由闭环系统(32)可以看出,当 ε 非常小时,闭环系统(32)是一个标准的奇异扰动系统,为此采用奇异扰动性理论分析其稳定性. 同时,当 ε 非常小时,观测器(22)和(26)的反馈增益很大. 根据文献[4-15],较大的反馈增益,可能导致闭环系统(32)出现脉冲峰值现象,破坏闭环系统的稳定性. 这一脉冲峰值现象是由控制律 u^* 及 u_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 瞬间非常大直接产生. 于是,采用饱和函数 $\text{Sat}(\cdot)$ 对控制律 u^* 及 u_i^* 进行处理,使得在脉冲峰值现象发生时系统(1)状态 x 仍然处于可稳定范围内,进而消除对闭环系统稳定性的影响. 处理后,控制律 u_i 及 u^* 变为

$$u_i^* = \text{Sat}(u_i^*) = \begin{cases} u_i^*, & |u_i^*| < m_i; \\ m_i \cdot \text{sgn}(u_i^*), & |u_i^*| \geq m_i. \end{cases} \quad (33)$$

$$u^* = \text{Sat}(u) = \begin{cases} u^*, & |u^*| < m; \\ m \cdot \text{sgn}(u^*), & |u^*| \geq m. \end{cases} \quad (34)$$

式中, m_i 和 m 分别为系统(1)稳定域内式(15)和

(16)所示控制律 u_i 及 u 的最大绝对值. 另外,由控制律 u_i 、 u 定义及假设2可知,闭环系统(31)中 $\dot{\eta}$ 是有界的. 在此基础上,给出闭环系统的稳定性分析.

定理1 考虑跟踪系统(14),在控制律(23)和(27)作用下,其跟踪闭环系统(32),存在非常小正常数 ε_1 ,使得 $\varepsilon < \varepsilon_1$ 时,观测器(22)和(26)在很短时间内跟踪上闭环系统(32)不确定性 η .

证明 根据奇异扰动性理论^[4],当 $\varepsilon = 0$ 时,方程 $A'\delta = 0$ 有唯一根 $\delta = 0$,则闭环系统(32)的降阶系统(慢速系统)为

$$\dot{z} = Az. \quad (35)$$

边界层系统(快速系统)为

$$\dot{\zeta} = A'\zeta. \quad (36)$$

式中, $\zeta = d\delta/d\tau$, $\tau = t/\varepsilon^2$.

针对边界层系统(36),根据 Lyapunov 特征值判据^[4],由矩阵 A' 定义,可得边界层系统 $\dot{\zeta} = A'\zeta$ 指数稳定. 进一步,由 Lyapunov 判据^[4]可知,边界层系统(36)存在连续正定 Lyapunov 函数 $W(\delta(t)) = \delta^T \delta$. 沿闭环系统(32)对函数 $W(\delta(t))$ 进行求导,可得

$$\dot{W} = -(2/\varepsilon^2) \cdot \|\delta^T A' \delta\|^2 + 2\delta^T \dot{\eta}. \quad (37)$$

令 $\alpha = \max\{\alpha_i | i = 1, 2, \dots, n\}$,根据 $\dot{\eta}$ 的有界性,定义 $k_0 = \sup\{\|\dot{\eta}\|\}$,则式(37)可化为

$$\begin{aligned} \dot{W} \leq & -(2\alpha/\varepsilon^2) \cdot \|\delta^T \delta\|^2 + 2\delta^T \dot{\eta} \leq \\ & -(2\alpha/\varepsilon^2) W + 2k_0 \sqrt{W}. \end{aligned} \quad (38)$$

令 $c_1 = 4k_0^2/\alpha^2$,则当 $W(\delta(t)) \geq c_1 \varepsilon^4$ 时,式(38)可变为

$$\dot{W} \leq -(\alpha/\varepsilon^2) W. \quad (39)$$

选择闭环系统(32)初始时刻为 t_0 ,并令 $c_2 = W(\delta(t_0))$, c_2 为一正常数,则当 $c_2 \geq c_1 \varepsilon^4$ 时,由式(39)可得,闭环系统(32)存在时间常数

$$\tau_\varepsilon = -(\varepsilon^2/\alpha) \ln(c_1 \varepsilon^4/c_2), \quad (40)$$

使得 $W(\delta(t))$ 满足

$$W(\delta(t)) \leq c_1 e^{-(\alpha/\varepsilon^2)t}, \quad t \in (t_0, t_1], \quad (41)$$

$$W(\delta(t_1)) \leq c_1 \varepsilon^4. \quad (42)$$

式中, $t_1 = t_0 + \tau_\varepsilon$. 由于 $W(\delta(t)) = c_1 \varepsilon^4$ 时,式(39)仍然成立且 $\dot{W} < 0$,则由式(42)可得

$$W(\delta(t)) < c_1 \varepsilon^4 (t > t_1). \quad (43)$$

即 $t > t_1$ 时, $W(\delta(t))$ 是 $O(\varepsilon)$. 此时,根据 Lyapunov 函数 $W(\delta(t))$ 定义,可得 $\|\delta(t)\|$ 满足

$$\|\delta(t)\| \leq c_3 \varepsilon^2 (t > t_1) \quad (44)$$

是 $O(\varepsilon)$,其中 $c_3 = \sqrt{c_1}$. 这里,范数 $\|\delta(t)\|$ 是指向量 $\delta(t)$ 的 2-范数. 同时,根据 $\delta = \eta - \hat{\eta}$,由式(44)

可得,当 $t > t_1$ 时, $\eta - \hat{\eta}$ 是 $O(\varepsilon)$. 另外,由式(40)可以看出, τ_ε 也是 $O(\varepsilon)$. 因此,存在非常小正常数 ε_1 , 当 $\varepsilon < \varepsilon_1$ 时,观测器(22)和(26)在很短时间内跟踪上闭环系统(32)中未知非线性 η . 在这里, τ_ε 不仅是奇异扰动系统(32)脉冲峰值时间常数的估计值,也是观测器跟踪上闭环系统(32)中未知非线性 η 所需时间的估计值. 定理1证毕.

定理2 在定理1基础上,跟踪闭环系统(32)存在非常小正常数 ε^* , 使得 $\varepsilon < \varepsilon^*$ 时,跟踪闭环系统(32)实现渐近稳定,即系统(1)实现渐近稳定控制.

证明 考虑降阶系统(35),根据 Lyapunov 特征值判据^[14],由矩阵 A 定义,可得降阶系统(35)指数稳定. 进一步,由 Lyapunov 判据^[14]可知,降阶系统(35)存在连续正定 Lyapunov 函数 $V(z(t)) = z^T z$. 类似定理1推导过程,沿闭环系统(32)对 $V(z(t))$ 求导,得

$$\dot{V} = -2 \|z^T A z\| + 2z^T \delta. \quad (45)$$

令 $k_0' = \max\{k_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$, 由式(44)可得,当 $t > t_1$ 时,式(45)可变为

$$\dot{V} \leq -2k_0' V + 2c_3 \varepsilon^2 \sqrt{V}. \quad (46)$$

令 $c_4 = 4c_3^2 / (k_0')^2$, 当 $t > t_1$ 且 $V(z(t)) \geq c_4 \varepsilon^4$ 时,式(46)可变为

$$\dot{V} \leq -k_0' V. \quad (47)$$

可以看出,这种情况下, Lyapunov 函数 $V(z(t))$ 具有单调递减特性且满足 $\dot{V} < 0$. 同时,也可以看出,当 $V(z(t_1)) \geq c_4 \varepsilon^4$, 函数 $V(z(t))$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V = c_4 \varepsilon^4 \quad (48)$$

是 $O(\varepsilon)$. 此时,根据 Lyapunov 函数 $V(z(t))$ 定义,可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t)\| = c_5 \varepsilon^2. \quad (49)$$

即当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\|z(t)\|$ 也是 $O(\varepsilon)$, 其中 $c_5 = \sqrt{c_4}$. 这里,范数 $\|z(t)\|$ 是指向量 z 的2-范数.

由定理1及上述分析过程可得,集合 $D = \{(z, \delta) \mid \|z\| \leq c_5 \varepsilon^2, \|\delta\| \leq c_3 \varepsilon^2\}$ 为闭环系统(32)的全局渐近收敛域,且可以通过调节参数 ε , 实现集合 D 任意小. 因此,存在非常小正常数 ε^* , 当 $\varepsilon < \varepsilon^* < \varepsilon_1$ 时,闭环系统(32)实现渐近稳定控制. 由假设2中不确定非线性函数 $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的 Lipschitz 连续性,可得此时系统(1)实现渐近稳定控制. 定理2证毕.

2 仿真实验

2.1 实例1

考虑如下二阶系统^[1,4]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \theta_1 x_1^3 - 3x_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + \theta_2 u. \end{cases} \quad (50)$$

式中: $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 为系统可测状态; $u \in \mathbb{R}$ 为控制输入; $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 为系统未知参数向量.

在系统(50)中,由于参数 θ_2 未知,使得控制 u 无法确切得到,于是取其估计值为 $\hat{\theta}_2 = 2$, 则此时系统不确定非线性为 $f_1 = \theta_1 x_1^3 - 3x_1$, $f_2 = x_1 + (\theta_2 - \hat{\theta}_2)u$. 采用本文提出的串级主动补偿控制方法进行仿真,系统仿真参数选取如下: 系统状态初始值选取为 $x(0) = (1, 2)^T$; 系统未知参数向量选取为 $\theta = (1.952, 1.952)^T$; 观测器及控制器参数选取为 $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 10, \varepsilon = 0.05, k_1 = 4, k_2 = 4$. 仿真结果如图2(a)和(b)所示. 在系统不确定参数相同条件下,采用文献[4]中 Evolutional Robust Control 控制方法进行仿真,结果如图2(c)和(d)所示.

通过对图2(a)和(c)的比较可以看出,采用本文提出的串级主动补偿控制方法,其控制效果优于文献[4]中所采用的控制方法.

2.2 实例2

考虑如下二阶系统^[1,3]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 e^{\theta_1 x_1^2}, \\ \dot{x}_2 = u + x_1 (1 + x_2^2)^{\theta_2}. \end{cases} \quad (51)$$

式中: $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 为系统可测状态; $u \in \mathbb{R}$ 为控制输入; $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 为系统未知参数向量.

采用本文提出的串级主动补偿控制方法,进行仿真. 系统仿真参数选取如下: 系统状态初始值选取为 $x(0) = (1, -3)^T$; 系统未知参数选取为 $\theta_1 = 1, \theta_2 = 2$; 观测器及控制器参数选取为 $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 5, \varepsilon = 0.025, k_1 = 4, k_2 = 4$. 仿真结果如图3所示.

2.3 实例3

考虑如下二阶系统^[1,3]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1 (g_1^*(t) \sin(10t) + g_2^*(t)), \\ \dot{x}_2 = u + x_1 (g_3^*(t) \cos(3t)). \end{cases} \quad (52)$$

$$y = x_1 \quad (53)$$

式中: $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ 为系统可测状态; $u \in \mathbb{R}$ 为控制输入, $y \in \mathbb{R}$ 为系统可测输出; $g_1^*(t), g_2^*(t)$ 和 $g_3^*(t)$ 为系统不确定性.

采用本文提出的串级主动补偿控制方法,利用

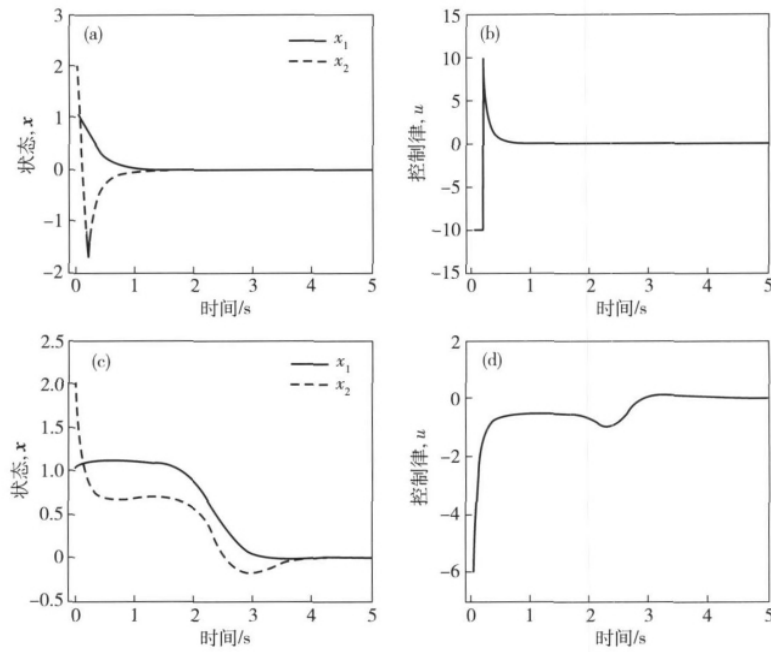


图 2 闭环系统仿真曲线. (a) 串级控制状态 x 响应曲线; (b) 串级控制律 u ; (c) 文献 [4] 鲁棒控制状态 x 响应曲线; (d) 文献 [4] 鲁棒控制律 u

Fig. 2 Simulation curves of the closed-loop system: (a) response curve of state x based on cascade control; (b) cascade control law u based on cascade control; (c) response curve of state x based on robust control in Ref. [4]; (d) control law u based on robust control in Ref. [4]

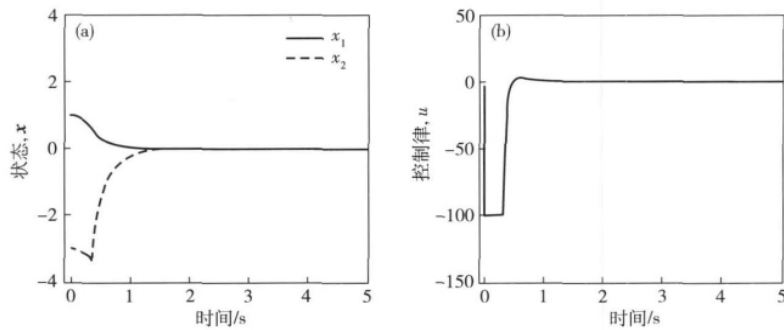


图 3 串级控制闭环系统仿真曲线. (a) 状态 x 响应曲线; (b) 控制律 u

Fig. 3 Simulation curves of the closed-loop system based on cascade control: (a) response curve of state x ; (b) cascade control law u

与文献 [4] 相同的系统参数, 即 $g_1^*(t) = 1, g_2^*(t) = \sin(t)$. 系统仿真参数选取如下: 观测器及控制器参数选取为 $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 5, \varepsilon = 0.025, k_1 = 4, k_2 = 4$. 仿真结果如图 4 所示.

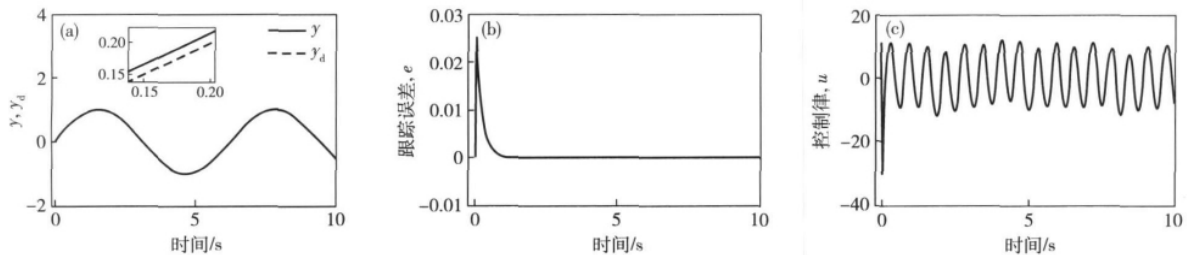


图 4 闭环系统仿真曲线. (a) 给定 y_d 及输出 y 变化曲线; (b) 跟踪误差 e 变化曲线; (c) 串级控制律 u

Fig. 4 Simulation curves of the closed-loop system: (a) given y_d and output y ; (b) tracking error e ; (c) cascade control law u

3 结论

(1) 针对一类具有下三角结构的不确定非线性系统研究其稳定控制问题,提出了一种基于 Back-stepping 方法的串级主动补偿控制策略,实现了闭环系统的渐近稳定控制. 设计了观测器,解决了系统不确定非线性未知问题. 引入奇异扰动性理论,给出了闭环系统的稳定性分析. 通过对三个对象的仿真,结果均验证了该控制方法的有效性.

(2) 由于各串级控制器中均包含着观测器,它能实时估计并补偿跟踪系统的不确定非线性,因此减少了对对象精确数学模型的依赖,增强了控制系统的抗扰能力,使得即使系统存在不确定性,受控系统也能保持良好的动态特性. 另外,与传统 Back-stepping 方法相比,本文设计的控制方法,其结构简单,便于调节.

参 考 文 献

- [1] Wei W. *Cascade and Active Disturbance Compensation Control of Nonlinear Systems* [Dissertation]. Beijing: University of Science and Technology Beijing, 2010: 11
(魏伟. 非线性系统串级控制与主动补偿应用研究 [学位论文]. 北京: 北京科技大学, 2010: 11)
- [2] Wei W, Li D H, Wang J. Robust control for a class of uncertain nonlinear systems: a cascade approach. *J Tsinghua Univ Sci Technol*, 2010, 50(4): 493
(魏伟,李东海,王京. 一类非线性不确定系统的串级鲁棒控制. 清华大学学报: 自然科学版, 2010, 50(4): 493)
- [3] Ye X D. Global adaptive control of nonlinearly parametrized systems. *IEEE Trans Autom Control*, 2003, 48(1): 169
- [4] Liu X, Jiang J P. Evolutional robust control for nonlinear uncertain systems // *The 30th Annual conference of IEEE Industrial Electronics Society*. Busan, 2004: 2792
- [5] Zhang Y P, Fidan B, Ioannou P A. Backstepping control of linear time-varying systems with known and unknown parameters. *IEEE Trans Autom Control*, 2003, 48(11): 1908
- [6] Hua C C, Feng G, Guan X P. Robust controller design of a class of nonlinear time delay systems via backstepping method. *Automatica*, 2008, 44(2): 567
- [7] Yang J H, Hsu W C. Adaptive backstepping control for electrically driven unmanned helicopter. *Control Eng Pract*, 2009, 17(8): 903
- [8] Nakkarat P, Kuntanapreeda S. Observer-based backstepping force control of an electrohydraulic actuator. *Control Eng Pract*, 2009, 17(8): 895
- [9] Yu J P, Chen B, Yu H S, et al. Adaptive fuzzy tracking control for the chaotic permanent magnet synchronous motor drive system via backstepping. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2011, 12(1): 671
- [10] Lin W, Qian C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: a nonsmooth feedback framework. *IEEE Trans Autom Control*, 2002, 47(5): 757
- [11] Lin W, Qian C J. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: the smooth feedback case. *IEEE Trans Autom Control*, 2002, 47(8): 1249
- [12] Sun Z Y, Liu Y G. Adaptive state-feedback stabilization for a class of high-order nonlinear uncertain systems. *Automatica*, 2007, 43(10): 1772
- [13] Alvarez-Ramirez J, Suarez R, Morales A. Cascade control of a class of uncertain nonlinear systems: a backstepping approach. *Chem Eng Sci*, 2000, 55(16): 3209
- [14] Khali H K. *Nonlinear Systems*. Beijing: Electronic Industry Press, 2007
- [15] Khali H K. High-gain observers in nonlinear feedback control // *International Conference on Control, Automation and Systems*, Seoul, 2008: xlvii
- [16] Zheng D Z. *Linear System Theory*. Beijing: Tsinghua University Press, 2002
(郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 2002)