

含有预期和时滞的经济周期模型稳定性分析

刘祥东¹⁾✉, 刘 澄¹⁾, 陆嘉骏²⁾

1) 北京科技大学东凌经济管理学院, 北京 100083 2) 浙江大学经济学院, 杭州 310027

✉ 通信作者, E-mail: xdliau@ustb.edu.cn

摘 要 将预期的资本存量引入现阶段的投资决策函数, 同时考虑资本积累过程中的投资时滞, 构建一个含有预期和时滞的经济周期模型. 首先利用微分动力系统相关的理论研究系统的稳定性, 然后把投资时滞或资本存量的预测时间作为分支参数, 讨论由此参数导致 Hopf 分支的条件, 并执行一些数值模拟以验证所得结论. 研究结果表明: 资本存量预期和投资时滞共同构成经济周期的诱导因素; 对资本存量进行短期合理的预测, 据此制定投资决策, 能够在一定程度上冲销由投资时滞所造成的经济波动.

关键词 经济周期; 资本存量; 数学模型; 稳定性; Hopf 分支

分类号 F019.2; O175.7

Stability analysis of a business cycle model including anticipation and delay

LIU Xiang-dong¹⁾✉, LIU Cheng¹⁾, LU Jia-jun²⁾

1) Dongling School of Economics and Management, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

2) College of Economics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China

✉ Corresponding author, E-mail: xdliau@ustb.edu.cn

ABSTRACT A business cycle model with anticipation and delay was constructed by introducing anticipated capital stock into the investment decision function in the present period and considering investment delay in the capital accumulation process. This system's stability was investigated by using related theories of differential dynamical systems first. Then investment delay or the prediction time of capital stock was taken as a bifurcation parameter, and the conditions of Hopf bifurcation caused by the parameter were discussed. Last, some numerical simulations were carried out to confirm the obtained conclusions. It is shown that capital stock anticipation and investment delay together constitute the induced factors of business cycle. Economic fluctuations caused by investment delay can be dampened to some extent if the government makes investment decision based on short-term reasonable forecast on capital stock.

KEY WORDS business cycle; capital stock; mathematical models; stability; Hopf bifurcation

经济周期指总的经济活动中扩张和收缩的交替, 这种周期变动通过国民生产总值、工业生产指数以及就业、收入等综合经济活动指标的波动而显示出来. 近几十年来, 经济学家逐渐认识到宏观经济系统是一个具有非线性机制的复杂动态系统, 相继利用非线性动力学的相关理论研究经济周期, 推动着经济周期研究的不断向前发展. 在早期的非线性经济周期研究中, Kaldor^[1] 假设投资依赖于生产总值和资本存量, 通过图示证明随时间变化的非线性

投资和储蓄函数导致经济周期产生. Chang 和 Smyth^[2] 总结 Kaldor 关于经济周期的思想, 建立了一个描述国民生产总值和资本存量随时间变化的非线性动态系统, 给出系统存在极限环的充要条件, 从数学上严格证明了 Kaldor 在 1940 年提出的模型可以产生经济周期. 在此基础上, Grasman 和 Wentzel^[3] 在 Kaldor 经济周期模型中考虑了资本损耗率, 并证明新建立的 Kaldor 经济周期模型可以出现极限环和均衡共存的情况, 使得模型能够解释更多的

收稿日期: 2012-12-15

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71173012); 中国博士后科学基金资助项目(2013M540855)

DOI: 10.13374/j.issn1001-053x.2014.03.019; http://journals.ustb.edu.cn

经济运行状况. 沿着另外一条思路, 根据 Hicks 和 Hansen 提出的 IS-LM 模型, Ackley^[4] 建立了一个反映生产总值和利率随时间变化的完全 Keynes 系统 (也被称为标准的 IS-LM 模型). Torre^[5] 利用分支理论研究了完全 Keynes 系统极限环的存在性, 发现即使没有投资和储蓄函数非线性的假设, 系统仍然能够产生经济周期现象. 总体来看, 早期这些形式简单的动态宏观经济模型为解释经济周期的成因在理论上搭建了较为完美的框架, 但是过于简化的经济运行状况和一些重要经济变量的忽略, 使得模型对经济运行的解释力度受到限制.

随后, 学者尝试从以下两个方面改进经济周期模型: 一是考虑投资过程中的时滞, 二是增加经济运行中的重要经济变量. 虽然 Kalecki^[6] 于 1935 年曾在经济周期模型中提出投资时滞的观点——资本设备从安装到生产需要一个孕育周期或时滞, 但受限于相关数学理论的匮乏, 在相当长的时间内没有学者探讨投资时滞与经济周期的关系. 随着 20 世纪 90 年代时滞泛函微分方程理论的逐渐成熟, Krawiec 和 Szydowski^[7] 首次定性分析了投资时滞对经济周期的影响. 通过研究含有投资时滞的 Kaldor-Kalecki 经济周期模型, 作者发现对于投资函数中的小时滞参数, 系统具有 Liénard 方程形式; 随着时滞的增大, 系统表现为极限环行为、多周期行为、非周期循环行为甚至混沌行为. 文献 [8-10] 对于模型均衡点的稳定性、分支、周期解的存在性及稳定性等动力学性质进行了研究, 从理论上验证了该观点. 此外, 在汲取 Kaldor 经济周期模型及标准的 IS-LM 模型的思想精髓后, Gabisch 和 Lorenz^[11] 建立并研究一个同时含有生产总值、利率和资本存量的扩展的 IS-LM 经济周期模型. Cai^[12] 根据 Kalecki^[6] 的投资时滞的思想, 在资本积累方程中引入投资时滞, 构建并研究了含有一个时滞的扩展的 IS-LM 经济周期模型. 考虑到资本存量的变化是由过去的投资决策造成的^[13], Kaddar 和 Alaoui^[14] 认为在更合理的经济周期模型中, 应该在资本积累方程中对生产总值、资本存量和利率中都引入时滞, 进而构建并研究具有三个相同时滞的扩展的 IS-LM 经济周期模型. 随着更多的经济变量以及投资时滞的引入, 扩展的 IS-LM 模型能够更贴切地反映经济的运行状况, 因而对于经济周期成因的解释更具力度.

事实上, 具有时滞的系统是一种记忆系统. 其中, 过去的事件对于系统现在行为产生重要影响. 然而经济系统是一个复杂系统, 它即要体现经济主

体过去的行为对系统现时状况的影响, 又需要反映经济主体在经济活动中的预期. Dubois^[15] 利用具有预期和延迟的差分微分方程, 构造一种计算预期系统的工具, 并以 Kaldor-Kalecki 经济周期模型为例, 创建一种在现阶段计算预期资本存量的方法, 旨在说明预期对于投资决策和组织变革的重要性. 因此, 本文将在扩展的 IS-LM 模型中考虑投资时滞以及现阶段投资决策中对于资本存量预期, 构建一个含有预期和时滞的混合型 IS-LM 经济周期模型, 利用微分动力系统相关理论研究新建立模型的稳定性, 以及投资时滞或资本存量的预测时间对于系统稳定性的影响.

1 模型的构建与分析

1.1 模型构建

根据上文分析, 在资本积累方程中考虑投资时滞, 在生产总值积累方程中考虑预期资本存量对于现阶段投资决策的影响, 从而可以结合扩展的 IS-LM 模型构建如下一个含有预期和时滞的混合型 IS-LM 经济周期模型:

$$\begin{cases} Y'(t) = \alpha [I(Y(t), K(t+\tau), R(t)) - S(Y(t), R(t))], \\ R'(t) = \beta [L(Y(t), R(t)) - \bar{M}], \\ K'(t) = I(Y(t-\tau), K(t-\tau), R(t-\tau)) - dK(t). \end{cases} \quad (1)$$

式中, t 时刻的生产总值、资本存量和利率分别用 $Y(t)$ 、 $K(t)$ 和 $R(t)$ 表示. $\alpha > 0$ 为商品市场的调节系数, $\beta > 0$ 为货币市场的调节系数, $d \in (0, 1)$ 为资本存量的损耗率, $I(Y(t), K(t), R(t))$ 和 $S(Y(t), R(t))$ 分别是 t 时刻的投资函数和储蓄函数, $L(Y(t), R(t))$ 是 t 时刻的流动性偏好函数, \bar{M} 是货币的常数供应量, $\tau > 0$ 为投资时滞或者对于资本存量的预测时间, $K(t+\tau)$ 表示 t 时刻的预期的资本存量.

作代换 $Z(t) = K(t+\tau)$, 则系统 (1) 可变换为

$$\begin{cases} Y'(t) = \alpha [I(Y(t), Z(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))], \\ R'(t) = \beta [L(Y(t), R(t)) - \bar{M}], \\ Z'(t) = I(Y(t), Z(t-\tau), R(t)) - dZ(t). \end{cases} \quad (2)$$

假设系统 (2) 存在唯一的正均衡点 $E^* = (Y^*, R^*, Z^*)$, 则在均衡点处满足 $Y'(t) = R'(t) = Z'(t) = 0$, 从而下列关系式成立:

$$\begin{aligned} I(Y^*, Z^*, R^*) &= S(Y^*, R^*), \quad L(Y^*, R^*) = \bar{M}, \\ Z^* &= I(Y^*, Z^*, R^*)/d. \end{aligned}$$

1.2 局部渐近稳定性分析

经济系统的稳定意味着经济整体运行平稳, 系

统中的经济变量不会出现持续性的周期振荡,而是经历短暂的波动之后回归至均衡. 本节将讨论当参数 $\tau=0$ 时系统(2)均衡点的稳定性. 记 $\partial I(Y^*, Z^*, R^*)/\partial Y = I_Y, \partial I(Y^*, Z^*, R^*)/\partial R = I_R, \partial I(Y^*, Z^*, R^*)/\partial Z = I_Z, \partial L(Y^*, R^*)/\partial Y = L_Y, \partial L(Y^*, R^*)/\partial R = L_R, \partial S(Y^*, R^*)/\partial Y = S_Y, \partial S(Y^*, R^*)/\partial R = S_R$. 本文沿用文献[16]中的一般性假设 $I_Y > 0, I_R < 0, L_Y > 0, L_R < 0, S_Y > 0, S_R < 0$. 令 $y(t) = Y(t) - Y^*, r(t) = R(t) - R^*, z(t) = Z(t) - Z^*$, 线性化系统(2)可得

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \alpha [I_Y - S_Y] y(t) + (I_R - S_R) r(t) + I_Z z(t), \\ \dot{r}(t) = \beta [L_Y y(t) + L_R r(t)], \\ \dot{z}(t) = I_Y y(t) + I_R r(t) + I_Z z(t - \tau) - dz(t). \end{cases} \quad (3)$$

进而可以求出系统(3)特征方程为

$$[\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + D] + [C\lambda^2 + E\lambda + F]e^{-\lambda\tau} \triangleq P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (4)$$

其中,

$$\begin{aligned} A &= d - \beta L_R - \alpha(I_Y - S_Y), \\ B &= \alpha(I_Y - S_Y)(\beta L_R - d) - \beta d L_R - \alpha\beta(I_R - S_R)L_Y - \alpha I_Z I_Y, \\ C &= -I_Z, \\ D &= \alpha\beta d [L_R(I_Y - S_Y) - L_Y(I_R - S_R)] + \alpha\beta I_Z [L_R I_Y - L_Y I_R], \\ E &= \alpha I_Z (I_Y - S_Y) + \beta I_Z L_R, \\ F &= \alpha\beta I_Z [L_Y(I_R - S_R) - L_R(I_Y - S_Y)]. \end{aligned}$$

因此,由 Routh-Hurwitz 准则可得到如下定理.

定理 1 当 $\tau=0$ 时,系统(2)的特征方程为

$$\lambda^3 + (A - C)\lambda^2 + (B + E)\lambda + D + F = 0.$$

若以下三条件成立: (H₁) $A + C > 0$, (H₂) $D + F > 0$, (H₃) $(A + C)(B + E) - (D + F) > 0$; 则均衡点 $E^* = (Y^*, R^*, Z^*)$ 局部渐近稳定.

1.3 Hopf 分支分析

分支是经济系统由稳定过渡到不稳定的一个通道. 经济系统一旦出现分支,整体的稳定性将发生突变,经济变量由稳健地运行转变为持续性的周期振荡. 本节将讨论当参数 $\tau > 0$ 时系统(2)均衡点的稳定性. 利用投资时滞或资本存量的预测时间作为分支参数,研究其对于系统稳定性的影响,以及由其导致 Hopf 分支的条件.

为此,首先需要探讨特征方程(4)根的分布情况. 令方程(4)任意特征根为

$$\lambda(\tau) = u(\tau) + iv(\tau) \quad (i \text{ 为虚数单位 } i^2 = -1),$$

并将此特征根代入(4),然后分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} u^3 - 3uv^2 + Au^2 - Av^2 + Bu + D = -e^{-u\tau} [\cos(v\tau) \cdot (Cu^2 - Cv^2 + Eu + F) + \sin(v\tau)(Ev + 2Cuw)], \\ 3u^2v - v^3 + 2Auw + Bv = -e^{-u\tau} [\cos(v\tau)(Ev + 2Cuw) - \sin(v\tau)(Cu^2 - Cv^2 + Eu + F)]. \end{cases} \quad (5)$$

根据 Beretta 和 Kuang^[17]的结论,当特征根的实部穿越零点时,系统的稳定性发生改变. 因此,考虑临界情况,当系统(2)特征根 λ 的实部 $u = 0$ 时,由(5)式可得

$$\begin{cases} Av^2 - D = (F - Cv^2) \cos(v\tau) + Ev \sin(v\tau), \\ v^3 - Bv = Ev \cos(v\tau) - (F - Cv^2) \sin(v\tau). \end{cases} \quad (6)$$

将(6)式两边同时平方并相加,可得临界点的特征方程为

$$v^6 + Gv^4 + Hv^2 + M = 0. \quad (7)$$

其中 $G = A^2 - 2B - C^2, H = B^2 - 2AD + 2CF - E^2, M = D^2 - F^2$. 令 $\omega = v^2$, 则方程(7)可以化为

$$f(\omega) := \omega^3 + G\omega^2 + H\omega + M = 0. \quad (8)$$

令 $g = -G/3$, 方程(8)根的判别式为 $\Delta = [f'(g)]^2/4 + [f''(g)]^3/9$. 则当 $\Delta < 0$ 时,方程(8)有三个不同的实数根;当 $\Delta > 0$ 时,方程(8)存在一个实数根和两个共轭复数根;当 $\Delta = 0$ 时,方程(8)有一个二重或三重根.

为了方便判断方程根的情况,首先给出以下假定条件.

(H₄) 下列条件之一: (a₁) $G \geq 0, M < 0$; (a₂) $H \leq 0, M < 0$; (a₃) $G < 0, H > 0, M < 0, \Delta > 0$; (a₄) $G < 0, H = 0, M = 0$; (a₅) $H < 0, M = 0$.

(H₅) 下列条件之一: (b₁) $G < 0, H > 0, M > 0, \Delta < 0$; (b₂) $G < 0, H > 0, M = 0, G^2 > 4H$.

(H₆) $G < 0, H > 0, M < 0, \Delta < 0$.

(H₇) 下列条件之一: (c₁) $G \geq 0, H \geq 0, M \geq 0$; (c₂) $M > 0, \Delta > 0$.

根据笛卡尔准则的思想,结合以上假定条件可以得到如下引理.

引理 1 对于方程(8),有如下结论:

(i) 若(H₄)成立,则方程(8)有唯一正实根 ω_1 ;

(ii) 若(H₅)成立,则方程(8)有两个不同的正实根 ω_2 和 ω_3 (假设 $\omega_2 < \omega_3$);

(iii) 若(H₆)成立,则方程(8)有三个不同的正实根 ω_4, ω_5 和 ω_6 (假设 $\omega_4 < \omega_5 < \omega_6$);

(iv) 若(H₇)成立,则方程(8)没有正实根.

令 $v_k = \sqrt{\omega_k}, k = 1, 2, \dots, 6$, 利用方程组(6)求 $\sin(v\tau), \cos(v\tau)$ 可得

$$\sin(v\tau) = \frac{cv^5 + (AE - Bc - F)v^3 + (BF - DE)v}{c^2v^4 + (E^2 - 2Fc)v^2 + F^2},$$

$$\cos(v\tau) = \frac{(E - Ac)v^4 + (cD + AF - BE)v^2 - DF}{c^2v^4 + (E^2 - 2Fc)v^2 + F^2}.$$

令

$$l_{1k} = \frac{cv_k^5 + (AE - Bc - F)v_k^3 + (BF - DE)v_k}{c^2v_k^4 + (E^2 - 2Fc)v_k^2 + F^2},$$

$$l_{2k} = \frac{(E - Ac)v_k^4 + (cD + AF - BE)v_k^2 - DF}{c^2v_k^4 + (E^2 - 2Fc)v_k^2 + F^2},$$

$k = 1, 2, \dots, 6,$

则可以得到如下引理:

引理 2 (i) 若 (H_4) 成立, 则存在正数序列 $\{\tau_{1j}\}_{j=0}^\infty$ 使得 $\tau_{10} < \tau_{11} < \tau_{12} < \dots < \tau_{1j} < \dots$, 且当 $\tau = \tau_{1j}$ 时, 方程 (7) 有一对纯虚根 $\pm iv_1$;

(ii) 若 (H_5) 成立, 则存在正数序列 $\{\tau_{kj}\}_{j=0}^\infty$ 使得 $\tau_{k0} < \tau_{k1} < \tau_{k2} < \dots < \tau_{kj} < \dots$, 且当 $\tau = \tau_{kj}$ 时, 方程 (7) 有两对相对应的纯虚根 $\pm iv_k, k = 2, 3$;

(iii) 若 (H_6) 成立, 则存在正数序列 $\{\tau_{kj}\}_{j=0}^\infty$ 使得 $\tau_{k0} < \tau_{k1} < \tau_{k2} < \dots < \tau_{kj} < \dots$, 且当 $\tau = \tau_{kj}$ 时, 方程 (7) 有三对相对应的纯虚根 $\pm iv_k, k = 4, 5, 6$.

这里 $\tau_{kj} (k = 1, 2, \dots, 6; j = 0, 1, 2, \dots)$ 的定义如下:

$$\tau_{kj} = \frac{1}{v_i} \begin{cases} \arccos l_{2k} + 2j\pi, & l_{1k} > 0; \\ 2\pi - \arccos l_{2k} + 2j\pi, & l_{1k} < 0. \end{cases} \quad (9)$$

定理 2 若 $\lambda(\tau) = u(\tau) + iv(\tau)$ 为方程 (7) 的根, 满足 $u(\tau_{kj}) = 0$ 且 $v(\tau_{kj}) = v_k (k = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots)$, 则

$$u'(\tau_{1j}) > 0, \mu'(\tau_{2j}) < 0, \mu'(\tau_{3j}) > 0, \mu'(\tau_{4j}) > 0,$$

$$u'(\tau_{5j}) < 0, \mu'(\tau_{6j}) > 0, j = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

证明 由于 $u(\tau_{kj}) = 0$, 对方程组 (6) 关于 τ 求导, 并令 $\tau = \tau_{kj} (k = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots)$, 可得如下等式

$$\begin{cases} a_1 du/d\tau + b_1 dv/d\tau = c_1, \\ -b_1 du/d\tau + a_1 dv/d\tau = c_2. \end{cases} \quad (11)$$

其中

$$a_1 = -3v_k^2 + B + [E - \tau_{kj}(F - Cv_k^2)] \cos(v_k\tau_{kj}) + (2Cv_k - \tau_{kj}Ev_k) \sin(v_k\tau_{kj}),$$

$$b_1 = -2Av_k + (Ev_k - 2Cv_k) \cos(v_k\tau_{kj}) + [E - \tau_{kj}(F - Cv_k^2)] \sin(v_k\tau_{kj}),$$

$$c_1 = v_k(F - Cv_k^2) \sin(v_k\tau_{kj}) - Ev_k^2 \cos(v_k\tau_{kj}),$$

$$c_2 = Ev_k^2 \sin(v_k\tau_{kj}) + v_k(F - Cv_k^2) \cos(v_k\tau_{kj}).$$

由方程组 (11) 可以解得

$$\frac{du(\tau_{kj})}{d\tau} = \frac{a_1c_1 - b_1c_2}{a_1^2 + b_1^2} = \frac{v_k^2(3v_k^4 + Gv_k^2 + Hv_k + M)}{a_1^2 + b_1^2} =$$

$$\frac{v_k^2 f'(\omega_k)}{a_1^2 + b_1^2}, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

由引理 2 知 $f(\omega)$ 在 $\omega_1, \omega_3, \omega_4$ 和 ω_6 的邻域内单调递增, 在 ω_2 和 ω_5 的邻域内单调递减, 而 $f'(\omega)$ 在递增点处的值大于零, 在递减处的值小于零. 因此, 式 (10) 中的不等式成立.

结合引理 1 以及引理 2, 根据 Ruan 和 Wei^[18] 的结论可以得到如下定理.

定理 3 τ_{kj} 的定义见引理 2.

(i) 若 $(H_1) \sim (H_4)$ 成立, 则当 $\tau \in [0, \tau_{10})$ 时, 特征方程 (7) 的根的实部为负; 当 $\tau = \tau_{10}$ 时, 特征方程 (6) 有一对纯虚根 $\pm iv_1$, 其余的根的实部为负; 当 $\tau > \tau_{10}$ 时, 特征方程 (7) 至少有一个实部为正的根.

(ii) 若 $(H_1), (H_2), (H_3)$ 和 (H_5) 成立, 则存在正整数 m 满足 $\tau_{30} < \tau_{20} < \tau_{31} < \tau_{21} < \dots < \tau_{3m-2} < \tau_{2m-2} < \tau_{3m-1} < \tau_{3m} < \tau_{2m-1}$, 使得系统 (2) 存在 m 个由稳定到不稳定的切换. 当 $\tau \in (\tau_{2j}, \tau_{3j+1})$ ($\tau_{2,-1} = 0, j = -1, 0, \dots, m-1$) 时, 特征方程 (7) 的根实部为负; 当 $\tau = \tau_{2j}$ 或 $\tau = \tau_{3j} (j = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 特征方程 (7) 有两对纯虚根 $\pm iv_2$ 和 $\pm iv_3$, 其余根的实部为负; 当 $\tau \in (\tau_{3j}, \tau_{2j}) (j = -1, 0, \dots, m-1)$ 或 $\tau > \tau_{3m}$ 时, 特征方程 (7) 至少有一个实部为正的根;

(iii) 若 $(H_1), (H_2)$ 和 (H_3) 不成立而 (H_5) 成立, 则存在正整数 m 满足 $\tau_{20} < \tau_{21} < \tau_{31} < \dots < \tau_{2m-1} < \tau_{3m-1} < \tau_{3m} < \tau_{2m}$, 使得系统 (2) 存在 m 个由不稳定到稳定的切换. 当 $\tau \in (\tau_{3j}, \tau_{2j+1})$ ($\tau_{3,-1} = 0, j = -1, 0, \dots, m-2$) 或 $\tau > \tau_{3m-1}$ 时, 特征方程 (7) 至少有一个实部为正的根; 当 $\tau = \tau_{2j}$ 或 $\tau = \tau_{3j} (j = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 特征方程 (7) 有两对纯虚根 $\pm iv_2$ 和 $\pm iv_3$, 其余根的实部为负; 当 $\tau \in (\tau_{2j}, \tau_{3j}) (j = -1, 0, \dots, m-1)$ 时, 特征方程 (7) 的根实部为负.

(iv) 若 $(H_1), (H_2), (H_3)$ 和 (H_6) 成立, 由于 $f(\omega)$ 在 ω_4 和 ω_6 的邻域内单调递增, 在 ω_5 的邻域内单调递减, 从而随着 τ 的增大, 特征根在 ω_4 和 ω_6 处从左至右穿越虚轴, 在 ω_5 处从右至左穿越虚轴. 因此, 系统 (2) 至少存在一个稳定性切换.

定理 4 τ_{kj} 的定义见引理 2.

(i) 若 $(H_1) \sim (H_4)$ 成立, 则当 $\tau \in [0, \tau_{10})$ 时, 均衡点局部渐近稳定; 当 $\tau > \tau_{10}$ 时, 均衡点不稳定; 当 $\tau = \tau_{10}$ 时, 系统 (2) 在均衡点处产生 Hopf 分支.

(ii) 若 $(H_1), (H_2), (H_3)$ 和 (H_5) 成立, 则当 $\tau \in \{0\} \cup (\tau_{2j}, \tau_{3j+1})$ ($\tau_{2,-1} = 0, j = -1, 0, \dots, m-$

2) 时, 均衡点局部渐近稳定; 当 $\tau \in (\tau_{3j}, \tau_{2j})$ ($j = -1, 0, \dots, m-1$) 或 $\tau > \tau_{3m}$ 时, 均衡点不稳定; 当 $\tau \in \tau_{2j} \cup \tau_{3j} \cup \tau_{3m-1}$ ($j = -1, 0, \dots, m-2$) 时, 系统 (2) 在均衡点处产生 Hopf 分支.

(iii) 若 (H_1) 、 (H_2) 和 (H_3) 不成立而 (H_5) 成立, 则当 $\tau \in (\tau_{2j}, \tau_{3j})$ ($j = -1, 0, \dots, m-1$) 时, 均衡点局部渐近稳定; 当 $\tau \in \{0\} \cup (\tau_{3j}, \tau_{2j+1})$ ($j = -1, 0, \dots, m-1$) 或 $\tau > \tau_{3m}$ 时, 均衡点不稳定; 当 $\tau \in \tau_{2j} \cup \tau_{3j}$ ($j = -1, 0, \dots, m-1$) 时, 系统 (2) 在均衡点处产生 Hopf 分支.

(iv) 假定 (H_1) 、 (H_2) 、 (H_3) 和 (H_6) 成立, 若 τ^* 是一个稳定性切换, 其中 τ^* 满足 $\omega(\tau^*) \in \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, 则当 $\tau = \tau^*$ 时, 系统 (2) 在均衡点处产生 Hopf 分支.

2 数值模拟

本部分将用 Matlab 软件执行一些数值模拟以验证本文所得结论, 同时展示参数 τ (投资时滞或资本存量的预测时间) 对于经济周期产生的重要意义. 在数值模拟中, 根据文献 [14], 选取如下 Kaldor 型投资函数

$$I(Y(t), K(t), R(t)) = I_1(Y(t), R(t)) - cK(t) = \exp(Y(t)) / [1 + \exp(Y(t))] - \eta R(t) - cK(t),$$

其中 η 为大于 0 的常数. 储蓄函数为线性的, 即

$$S(Y(t), R(t)) = aY(t) + bR(t),$$

其中 a 和 b 为大于 0 的常数. 根据文献 [19], 选取流动性偏好函数为

$$L(Y(t), R(t)) = L_1(Y(t)) + L_2(R(t)) = \delta Y(t) + [\theta / (R(t) - \hat{R})].$$

其中 $\delta > 0$, $\theta > 0$, 且 $\hat{R} > 0$ 是一个非常小的确定利率, 当利率 $R(t)$ 下降到 \hat{R} 时, 产生流动性陷阱, 即

$$L_2(R(t)) \rightarrow +\infty, \quad R(t) \rightarrow \hat{R}.$$

除 τ 以外的参数取值如下: $\alpha = 2$, $\beta = 1.2$, $\delta = 0.04$, $\eta = 0.1$, $\theta = 0.0005$, $a = 0.2$, $b = 0.1$, $c = 0.2$, $d = 0.1$, $\bar{M} = 0.05$. 根据这些参数值, 容易得出系统的均衡点 $E^* = (1.1685, 0.1544, 2.4915)$. 进一步计算可得, 当 $\tau = 0$ 时, 特征方程为 $\lambda^3 + 0.3637\lambda^2 + 0.1116\lambda + 0.005977 = 0$, 易知 (H_1) 、 (H_2) 和 (H_3) 成立, 从而系统均衡点局部渐近稳定. 由于 $G = -0.2110$, $H = 0.01060$, $M = -1.2508 \times 10^{-5}$, $\Delta = -3.1086 \times 10^{-7}$, 利用引理 (1) 中的判别方法可知, 特征方程有三个不同的正实根. 根据定理 3、定理 4 和式 (9), 经过计算可得: 当分支参数 τ 分别为 6.6589、12.2402、23.9387、41.2879、57.1342 和 58.6371 时, 系统 (2) 相应地发生七次稳定性切

换, 在均衡点处产生 Hopf 分支现象; 当分支参数 $\tau \in (6.6589, 12.2402) \cup (23.9387, 34.6872) \cup (41.2879, 57.1342) \cup (58.6371, +\infty)$ 时, 经济系统不稳定, 经济变量产生周期性振荡, 呈现出明显的经济周期特征.

为了进一步展示分支参数 τ 对于经济系统稳定性的影响, 固定以上参数值, 选取不同 τ 值进行对比. 下文数值模拟中, 选取的系统初始值为 $(Y(0), R(0), K(0+\tau)) = (1, 0.02, 3)$. 首先分别选取分支参数 $\tau = 5$ 和 $\tau = 14$. 根据前文的理论分析可知, 此时经济系统稳定, 能够达到一般均衡状态. 由系统 (2) 的时间图 (图 1 和图 2) 可见, 随时间 t 的增大, 生产总值、利率和预期资本存量的波动幅度逐渐变小, 在经历一段时间的经济运行之后, 最终趋向于经济均衡状态, 经济运行平稳. 这表明在较短的投资时滞和合理的资本存量预期下, 投资活动与整体经济状况搭配基本合理, 没有出现投资不足或过度投资问题, 总产出、利率和资本存量运行平稳, 最终趋向一般均衡状态.

然后再分别选取分支参数 $\tau = 6.59$ 和 $\tau = 24$, 由前文的理论分析可知, 此时经济系统不稳定, 将发生周期性波动. 系统 (2) 的时间图 (图 3 和图 4) 显示, 随时间 t 的变化, 生产总值、利率和预期资本存量产生周期性振荡, 经济变量呈现显著的周期特性. 造成这一现象的原因在于, 在较长的投资时滞和资本存量预期下制定投资决策, 现阶段出现投资不足现象, 投资活动与整体经济运行错位, 导致经济出现周期性的波动. 本文的数值模拟还发现, 随着 τ 值的不断增大, 经济系统 (2) 在经历多个稳定性切换后, 最终变得不稳定. 限于篇幅, 不再展示后续的数值模拟. 需要说明的是, 过长的投资时滞或预测时间与现实情况不符, 这里仅是出于全面的理论分析考虑.

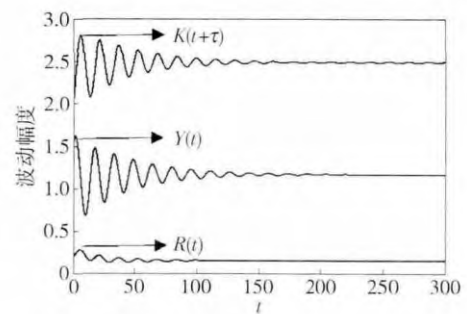


图 1 当 $\tau = 5$ 时系统 (2) 局部渐近稳定

Fig. 1 Locally asymptotically stability of System (2) at $\tau = 5$

图 1 ~ 图 4 所展示的经济系统稳定性的转变表明, 分支参数 τ 能够对宏观经济的稳定运行起决定

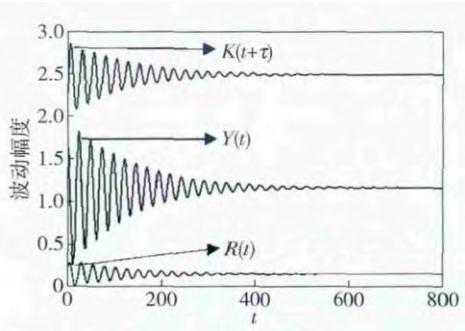


图2 当 $\tau = 14$ 时系统(2)再次局部渐近稳定

Fig. 2 Locally asymptotically stability of System (2) at $\tau = 14$ again

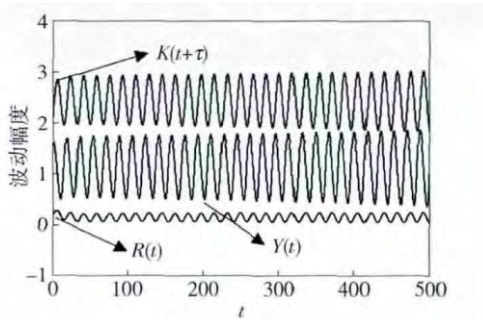


图3 当 $\tau = 6.59$ 时系统(2)不稳定,经济变量发生周期性振荡

Fig. 3 When $\tau = 6.59$, System (2) is unstable, and the economic variables is periodically oscillatory

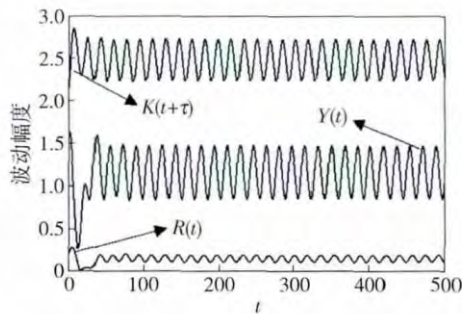


图4 当 $\tau = 24$ 时系统(2)再次不稳定,经济变量发生周期性振荡

Fig. 4 When $\tau = 24$, System (2) is unstable again, and the economic variables is periodically oscillatory

性作用,即资本存量的预测时间和投资时滞共同构成经济周期产生的诱导因素. 本文得出这一结论的经济意义十分明确. 由于国民经济的总体发展趋势向上,未来远期的国民生产总值和资本存量都必然会增加. 因此,从资本存量的预测时间角度来看,对资本存量的预测时间过长,预期的资本存量势必会大增. 根据文献[7]对投资函数与资本存量负相关的假设,在总产出和利率既定的条件下,资本存量越大,所需要的投资就越小;反之,资本存量越小,所需投资越大. 因而在现阶段的投资决策中,若对资本存量的预测时间加长,则预期的资本存量增大,现阶段的投资活动减弱,从而造成总产出的萎缩,经济处

于下行趋势. 随着这一趋势的蔓延,经济将经历衰退和萧条阶段,运行至谷底. 而在衰退和萧条阶段,投资活动的减弱和资本存量的损耗,使得资本存量的增速放缓;同时投资活动减少,市场对资金的需求量降低,又在一定程度上导致利率下降. 当经济运行至谷底时,较低的资本存量增量和市场利率共同促进了投资活动的开展. 投资活动的增加,使得总产出随之增加,经济开始复苏,并逐渐运行至繁荣阶段. 这样一来,在对资本存量的预测时间过长的影响下,伴随着投资活动减弱和增强的交替,经济运行经历衰退、萧条、复苏和繁荣四个阶段,形成经济周期.

从投资时滞角度来看,如果时滞过长,意味着从投入到产出的时间被无形地延长,导致生产效率降低,总产出减少,经济处于下行趋势,在经历衰退和萧条阶段后,运行至谷底. 在经济下行的过程中,投资活动的减弱和资本存量的损耗,在大大减缓资本存量增速的同时,还刺激了市场利率水平的下降. 这两个结果,又反过来刺激投资活动的增加,使得总产出逐渐增加,经济由谷底开始发生反转,逐步迈入复苏,然后进入繁荣阶段. 同样,在过长投资时滞的影响下,经济运行会经历衰退、萧条、复苏和繁荣四个阶段,形成经济周期.

值得注意的是,由图1~图4的对比可以发现,虽然经济系统随着分支参数值的增大,经历稳定和不稳定的转换,但是在每幅图的前几个周期内,国民生产总值、利率和预期资本存量的波动幅度随分支参数的增大而增大. 这表明投资时滞和资本存量的预测时间的增加,能够在一定程度上加剧经济的波动. 因此,减小投资时滞和资本存量的预测时间对于稳定经济,减弱经济的波动幅度具有重要意义. 此外,在文献[14]中经济周期模型仅考虑了投资时滞,而没有考虑对资本存量预期. 为了展示资本存量的预测时间对经济系统稳定性的影响,本文进一步做了一个对比性的数值模拟. 在数值模拟中,除 τ 外,选用的其他参数值都与本文的完全相同. 数值模拟显示,在投资时滞为 3.5 时,文献[14]中的经济系统不再稳定,呈现周期性振荡状态,并且国民生产总值的振荡幅度远大于本文中的情况(如图5所示). 这表明在相同参数取值下,保持文献[14]中的经济系统稳定的临界时滞必然小于 3.5,而此分支参数值又远远小于本文中的首个临界分支参数值 6.59. 由此可见,政府对资本存量进行短期的合理预测,并根据预测结果制定投资方案,能够在一定程度上减弱由投资时滞所造成的经济波动.

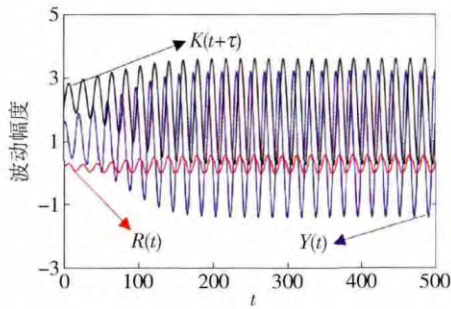


图5 当 $\tau=3.5$ 时文献[14]中的经济系统产生周期性振荡

Fig.5 When $\tau=3.5$, the economic system in Ref. [14] is periodically oscillatory

3 结论与建议

由于预期资本存量与资本存量的未来价值直接相关,政府会在现阶段的投资决策中考虑预期资本存量;同时过去的投资决策从制定到实际生产产出需要一段运作时间,从而造成产出的延迟。基于这两点考虑,本文在扩展的IS-LM模型中引入资本存量的预测时间和投资时滞,构建一个含有预期和时滞的混合型经济周期模型。把资本存量的预测时间和投资时滞作为分支参数,本文利用微分动力系统相关理论首先研究分支参数为零时均衡点的稳定性,然后分析随着分支参数不断增大,经济系统发生稳定性切换,产生Hopf分支的条件,并利用Matlab软件执行数值模拟以验证所得结论。

本文在一个新的框架下,从投资的角度阐述经济周期产生的原因。根据本文结论,政府可以从以下两个方面调节投资活动,减少经济发展中的不稳定因素,熨平由不合适的投资活动造成的经济动荡,促进宏观经济的平稳发展:第一,虽然现实经济环境中的投资时滞客观存在,但是仍然能够通过改良生产设备,提高人员工作效率等方式,缩短由投入到产出的时间差,增加产出的效率,进而降低投资时滞,减弱由此而造成的经济波动;第二,综合考虑现行宏观经济环境中各行业的产出效率,计算其中的平均投资时滞,根据时滞的大小对资本存量进行短期的合理预测,并结合预测结果制定投资决策,进一步冲销由投资时滞所造成的经济波动。

参 考 文 献

[1] Kaldor N. A model of the trade cycle. *Econ J*, 1940, 50(197):

78

- [2] Chang W W, Smyth D J. The existence and persistence of cycles in a non-linear model: Kaldor's 1940 model re-examined. *Rev Econ Stud*, 1971, 38(1): 37
- [3] Grasman J, Wentzel J J. Co-existence of a limit cycle and an equilibrium in Kaldor's business cycle model and its consequences. *J Econ Behav Organ*, 1994, 24(3): 369
- [4] Ackley G. *Macroeconomic Theory*. New York: The MacMillan Company, 1961
- [5] Torre V. Existence of limit cycles and control in complete Keynesian system by theory of bifurcations. *Econometrica*, 1977, 45(6): 1457
- [6] Kalecki M. A macrodynamic theory of business cycles. *Econometrica*, 1935, 3(3): 327
- [7] Krawiec A, Szydowski M. The Kaldor-Kalecki business cycle model. *Ann Oper Res*, 1999, 89: 89
- [8] Szydowski M, Krawiec A. The stability problem in the Kaldor-Kalecki business cycle model. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, 25(2): 299
- [9] Zhang C R, Wei J J. Stability and bifurcation analysis in a kind of business cycle model with delay. *Chaos Solitons Fractals*, 2004, 22(4): 883
- [10] Wu X P, Wang L C. Multi-parameter bifurcations of the Kaldor-Kalecki model of business cycles with delay. *Nonlinear Anal Real World Appl*, 2010, 11(2): 869
- [11] Gabisch G, Lorenz H W. *Business Cycle Theory: a Survey of Methods and Concepts*. Berlin: Springer-Verlag, 1989
- [12] Cai J P. Hopf bifurcation in the IS-LM business cycle model with time delay. *Electron J Differential Equations*, 2005, 2005(15): 1
- [13] Krawiec A, Szydowski M. On nonlinear mechanics of business cycle model. *Regul Chaotic Dyn*, 2001, 6(1): 101
- [14] Kaddar A, Alaoui T H. On the dynamic behavior of a delayed IS-LM business cycle model. *Appl Math Sci*, 2008, 2(31): 1529
- [15] Dubois D M. Extension of the Kaldor-Kalecki model of business cycle with a computational anticipated capital stock. *J Organ Transform Soc Change*, 2004, 1(1): 63
- [16] Zhou L J, Li Y Q. A dynamic IS-LM business cycle model with two time delays in capital accumulation equation. *J Comput Appl Math*, 2009, 228(1): 182
- [17] Beretta E, Kuang Y. Geometric stability switch criteria in delay differential systems with delay dependent parameters. *SIAM J Math Anal*, 2002, 33(5): 1144
- [18] Ruan S G, Wei J J. On the zeros of transcendental functions with applications to stability of delay differential equations with two delays. *Dyn Continuous Discrete Impulsive Syst Ser A*, 2003, 10(6): 863
- [19] De Cesare L, Sportelli M. A dynamic IS-LM model with delayed taxation revenues. *Chaos Solitons Fractals*, 2005, 25(1): 233