

## SI-FLAT 板形仪检测原理的流固耦合振动分析

李 稔<sup>1)</sup>, 孔 宁<sup>1)</sup>✉, 李洪波<sup>1)</sup>, 张 杰<sup>1)</sup>, 贾生晖<sup>2)</sup>, 褚玉刚<sup>2)</sup>, 刘海军<sup>2)</sup>

1) 北京科技大学机械工程学院, 北京 100083 2) 武汉钢铁(集团)公司, 武汉 430083  
✉通信作者, E-mail: kongning@ustb.edu.cn

**摘 要** 为从力学本质上揭示 SI-FLAT 非接触式板形仪的检测原理, 基于薄板流固耦合振动理论, 建立了薄板振幅与残余应力关系的数学模型. 在非协调 Föppl-von Kármán 方程组的平衡方程中引入惯性项与流体压强项, 利用气动载荷在时间上的周期性将流体速度函数、流体压强函数、薄板挠度函数和薄板应力势函数的时间变量分离出来, 得到描述 SI-FLAT 板形仪稳定工作状态的偏微分方程组. 进一步利用分离变量法求解该方程组, 最终建立起薄板振幅与残余应力的数学关系. 同时结合实测残余应力数据, 利用 Siemens 提出的振幅-残余应力模型反算得到实际薄板振幅分布, 并将其与流固耦合振动模型计算的振幅进行对比, 验证了提出的数学模型的可靠性. 进一步利用流固耦合振动模型分析了气泵进风口流体速度、检测距离和激振频率对振幅的影响, 为 SI-FLAT 板形仪科学合理的利用提供了理论依据.

**关键词** 板形仪; 残余应力; 振动; 薄板; 流固耦合

**分类号** TG335.5<sup>+</sup>6

## Analysis of fluid-structure interaction vibration based on the detection principle of SI-FLAT flatness measurement systems

LI Nong<sup>1)</sup>, KONG Ning<sup>1)</sup>✉, LI Hong-bo<sup>1)</sup>, ZHANG Jie<sup>1)</sup>, JIA Sheng-hui<sup>2)</sup>, CHU Yu-gang<sup>2)</sup>, LIU Hai-jun<sup>2)</sup>

1) School of Mechanical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China

2) Wuhan Iron and Steel (Group) Corporation, Wuhan 430083, China

✉Corresponding author, E-mail: kongning@ustb.edu.cn

**ABSTRACT** In order to reveal the mechanical essence of the detecting principle of SI-FLAT flatness measurement systems, the mathematical model of the relationship between amplitude and residual stress was established, based on the theory of fluid-structure interaction vibration of thin plates. The terms of inertia and fluid pressure were introduced to the equilibrium equation in incompatible Föppl-von Kármán equations. The time variables were separated out from the velocity function of fluid, pressure function of fluid, deflection function of thin plates and stress potential function of thin plates with consideration of periodic aerodynamic load. Therefore, the partial differential equations aiming at steady state of SI-FLAT flatness measurement systems was obtained. Solving the equations by using the method of separation of variables, the mathematical relationship between amplitude and residual stress was established. Combined with measured residual stress, the distribution of actual amplitude of thin plates could be calculated by the Siemens' amplitude-residual stress model, which coincided with the amplitude calculated by the fluid-structure interaction vibration model. The influences of fluid velocity at air pump's inlet, detecting distance and excitation frequency on amplitude were analyzed by using the fluid-structure interaction vibration model, which provides a theoretical basis for application of SI-FLAT flatness measurement systems.

**KEY WORDS** flatness measurement systems; residual stress; vibration; thin plates; fluid-structure interaction

收稿日期: 2016-09-14

基金项目: 中央高校基本科研业务费专项资金资助项目 (FRF-TP-15-016A3); “十二五”国家科技支撑计划资助项目 (2015BAF30B01)

冷轧带钢残余应力的检测是实现板形自动控制和消除板形缺陷的前提,故检测结果的准确程度直接影响成品板形质量.对带钢残余应力的检测是通过板形仪实现的,其中, Siemens 公司研发的采用气流激振—涡流测幅原理的 SI—FLAT 非接触式板形仪得到了比较普遍的应用<sup>[1-2]</sup>.该板形仪利用气泵产生的周期性空气负压作为激振载荷,驱动受足够大张应力(使带钢不发生在线屈曲)的在线运动带钢进行受迫振动,通过涡流传感器检测带钢在法向的位移,进而得到带钢振幅在宽度方向上的分布,最后利用 Siemens 公司提出的一套基于带张力梁振动理论的振幅—残余应力模型<sup>[3-4]</sup>计算带钢的残余应力,并利用基础目标曲线<sup>[3,5]</sup>对结果进行修正.

长期以来,关于 SI—FLAT 板形仪检测原理的研究主要是基于 Siemens 公司提出的振幅—残余应力模型展开的.黄桥宝<sup>[3]</sup>与杨光辉等<sup>[4]</sup>采用与 Siemens 公司相同思路的分条离散化解析模型,将带钢沿轧制方向切分为相互独立的窄条,并将气动载荷简化为集中载荷,基于梁的振动理论研究了带钢振幅—残余应力的关系,再采用有限元模型修正气动载荷分布规律,并与 Siemens 公司提出的振幅—残余应力模型进行对比;包仁人<sup>[5]</sup>利用有限元软件建立了固壁在狭窄均匀来流喷吹下的三维模型,对 SI—FLAT 板形仪的测量准确性及误差分布形式进行了分析,解释了误差形成机理,同时给出了相应的补偿量计算方法,其结果与 Siemens 给出的基础目标曲线相吻合.杨光辉等<sup>[6]</sup>在实际生产数据的基础上提出了气动载荷激振频率的设置原则,并利用有限元模型分析了具有几种典型残余应力分布形式的带钢在不同宽度、厚度、张应力等情况下的固有频率对振幅的影响.

总结 Siemens 公司提供的振幅—残余应力模型以及上述学者的工作可以得出以下几点:模型将板带沿轧制方向进行了分条离散化,进而采用带张力梁的模型分析梁的振幅与张应力关系,未将金属带钢作为连续的薄板处理;将气动载荷作为均布集中载荷处理,载荷大小人为给定,且未考虑到流体与固体间的耦合关系,与实际不符.以上两点所带来的误差 Siemens 公司通过基础目标曲线进行消除,但该曲线的机理并未明确.有限元仿真分析 SI—FLAT 的检测机理则未能考虑到带钢的残余应力,或仅考虑到几种典型的残余应力分布形式,并且将带钢简化为固壁,没有进行真正的流固耦合振动分析,无法对生产实际进行指导.另一方面, SI—FLAT 板形仪采用的涡流测距传感器检测振幅在 0.15 mm 左右<sup>[2]</sup>,否则无法保证检测结果的准确性,故有必要考虑检测距离(检测平台与带钢底面距离)与进风口处空气速度(或气泵风机流量)

对带钢振幅大小的影响.对于以上所有问题,可将 SI—FLAT 板形仪的检测机理问题抽象为带残余应力弹性薄板的流固耦合振动问题加以解决.

带有残余应力(非协调变形<sup>[7]</sup>)弹性薄板流固耦合振动问题的研究尚未见于公开发表的文献中,但是关于弹性结构流固耦合振动问题的研究<sup>[8-13]</sup>以及关于带有残余应力弹性结构振动问题的研究<sup>[14-17]</sup>已分别有一些成果.

对于弹性结构流固耦合振动问题的研究,主要有解析—半解析法<sup>[8-11]</sup>与有限单元法<sup>[12-13]</sup>.郑哲敏与马宗魁<sup>[8]</sup>采用纯解析法、Rayleigh 法和小参数摄动法分析了等截面悬臂梁一侧受到流体作用时的流固耦合自由振动模态,进一步采用 Rayleigh 法对变截面悬臂梁进行了类似的分析;In 等<sup>[9]</sup>研究了中等雷诺数( $Re = 30$ )情形下固定平板在带有攻角来流下周围的流场,以涡量(涡旋矢量垂直于平面的分量)表示的二维 Navier—Stokes 方程为控制方程,通过 Laurent 级数展开处理涡量在板边缘尖端的奇异性,在远离尖端以及边界层的外场部分采用有限差分法进行涡量分析,并与尖端部分的涡量进行匹配得到全场解;郝亚娟<sup>[10]</sup>采用相容 Lagrange—Euler 法,较为系统地分析了弹性薄板在理想不可压缩势流定常绕流下的小变形力学行为,给出了相应的算例,同时利用有限元软件对同一算例进行数值模拟进行对比验证,分析了误差产生的原因;胡世良等<sup>[11]</sup>对流场与平板之间的耦合运动进行了有限元仿真,基于流体的有限体积法求解任意 Lagrange—Euler 描述下不可压缩 Navier—Stokes 方程的理论,同时考虑到有限单元法离散求解 Lagrange 坐标下弹性动力学方程,计算了在静止流场中弹性薄板的自由振动和方柱后部平板的涡激振动问题,分析了流体与固体的不同物性参数对于平板耦合运动的影响;吕坤等<sup>[12]</sup>利用 ANSYS 和 CFX 软件的双向流固耦合功能模拟大空间中薄平板在一定攻角不同来流下的流固耦合特性,控制方程为非定常 Reynolds 平均 Navier—Stokes 方程,利用动网格计算得到大 Reynolds 数带攻角均匀来流平板的振动特性以及平板周围流场的非定常流动特性;Vaziri 与 Hutchinson<sup>[13]</sup>研究了金属夹芯板构成的工字钢结构在高强度气流冲击下的流固耦合作用,但是将气体激波的传播与固体结构做解耦处理,重点研究了两种不同的加载方式:随时间变化的压力载荷与强制不变的初始速度.

对于带有残余应力弹性结构振动问题的研究较少,主要以半解析法为主.高永毅等<sup>[14]</sup>利用 Галёркин 方法计算了具有给定形式残余应力四边简支薄板的固有频率,并与无残余应力的情况进行了比较;Dudarev 等<sup>[15]</sup>研究了带有残余应力管的稳态径向振动问题,

残余应力由管道内压卸载后引起,将系统量纲一和线性化后导出了依赖残余应力大小的固有频率形式;Gorb 与 Walton<sup>[16]</sup>基于大变形理论建立了分析带有残余应力弹性体叠加大变形基础上的微幅振动模型,并将其应用于血管内超声成像技术,算例对比了在不同血压下残余应力对血管径向振动本征频率的影响;Jiang 等<sup>[17]</sup>研究了残余应力与局部的几何非线性对压电纳米线振动特性的影响,基于 Hamilton 原理推导出动力学方程,并将残余应力与表面效应同时进行考虑,在给定电压下计算出纳米线的振动频率并与零残余应力状态下 Young-Laplace 模型进行对比。

借鉴以上工作的思路,本文将结构流固耦合振动问题的研究与带有残余应力结构振动问题的研究相结合,联立带有惯性项和流体压强载荷的非协调 Föppl-von Kármán 方程组以及不可压缩流体方程组,得到问题的基本控制方程组,并根据实际工程背景分别给出结构、流体的边界条件以及它们之间的连接条件,进而形成相应边值问题,利用分离变量法与级数展开法对该边值问题求解,形成描述 SI-FLAT 板形仪振幅-残余应力关系的流固耦合振动模型,用于指导实际应用与自主开发。

## 1 流固耦合振动分析的物理模型

SI-FLAT 板形仪的实物图与检测原理示意图分别如图 1 和图 2 所示。带有残余应力的带钢沿轧制方向运动,布置了位移传感器与气泵出口的检测平台位于张力辊与轧机末机架工作辊之间的检测区域,可认为任意时刻带钢在检测区域具有轧制方向两侧对边简支,宽度方向两侧对边自由的边界条件,同时受到下方气泵周期性抽真空造成的“吸力”作用而进行受迫振动,带钢离开检测区域后最终进入卷取机。虽然带钢沿轧制方向运动,但由于其残余应力张量的唯一非零分量(轧制方向正应力分量)沿轧制方向几乎不变<sup>[5,7]</sup>,故带钢在激振频率、激振力不变情况下的受迫振动响应(振幅分布和振动频率)也应保持稳定而不随时间变

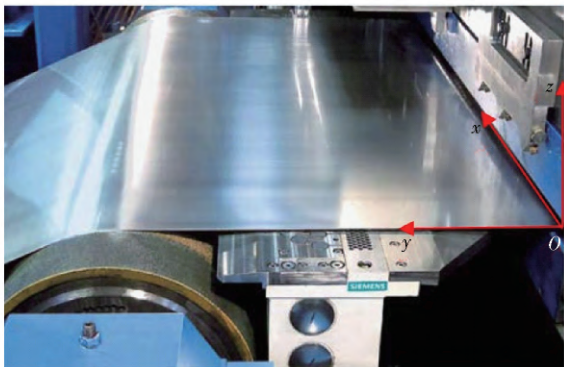


图 1 SI-FLAT 板形仪

Fig. 1 Photograph of SI-FLAT

化。因此,若只研究 SI-FLAT 板形仪在稳定工作状态(对应于轧机的稳定轧制阶段、带钢残余应力沿轧制方向不变)的检测机理,可以忽略带钢的运动而将其作为具有静态的对边简支对边自由边界条件的薄板。

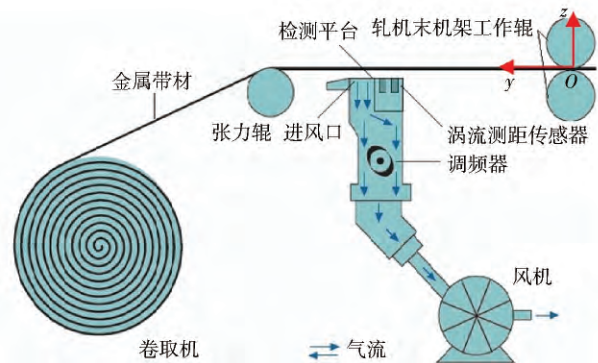


图 2 SI-FLAT 板形仪检测示意图

Fig. 2 Diagram of detection principle of SI-FLAT

为便于进一步分析,在检测区域附近建立三维直角坐标系。如图 1 所示,坐标原点  $O$  在带钢一条边界上,且位于轧机末机架工作辊与带钢相接触处(近似认为是线接触)的正下方,同时原点  $O$  还在带钢的中曲面上, $x$  轴平行于带钢宽度方向, $y$  轴平行于轧制方向(带钢运动方向),进而  $xOy$  平面与带钢中面重合, $z$  轴由右手定则确定。设检测区域内的带钢占据  $0 < x < b, 0 < y < l, -h/2 < z < h/2$ ,其中, $b$  为带钢宽度, $l$  为工作辊-带钢接触线与张力辊-带钢接触线间的距离(即检测区域沿轧制方向长度), $h$  为带钢厚度;检测平台位于平面  $z = -H - h/2$ ,其上的气泵进风口占据区域  $-d < x < b + d, L < y < L + a$ ,其中, $d$  为气泵进风口比带钢两侧各多出的距离(进风口沿宽度方向长度为  $b + 2d$ ), $L$  为进风口靠近轧机工作辊一侧的边界与工作辊-带钢接触线在  $xOy$  平面的投影距离, $a$  为气泵进风口沿轧制方向长度。

## 2 流固耦合振动分析的数学模型

### 2.1 流固耦合振动边值问题的建立

首先建立描述 SI-FLAT 板形仪检测机理的基本控制方程组,该方程组由描述薄板大变形的方程组与描述 Newton 流体低速运动的方程组两部分组成。在第 1 节建立的三维直角坐标系中,设  $i, j$  和  $k$  代表坐标轴  $x, y$  和  $z$  的单位矢量。记二维 Laplace 算子  $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ , 三维 Hamilton 算子  $\nabla = \partial / \partial x i + \partial / \partial y j + \partial / \partial z k$ , 二元算子  $L(A, B) = \partial^2 A / \partial x^2 \cdot \partial^2 B / \partial y^2 + \partial^2 B / \partial x^2 \cdot \partial^2 A / \partial y^2 - 2 \partial^2 A / \partial x \partial y \cdot \partial^2 B / \partial x \partial y$ 。用以描述带有残余应力薄板受迫振动的具有惯性项与流体压强项的非协调 Föppl-von Kármán 方程组<sup>[18]</sup>为

$$\rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \Delta^2 w - L(\Phi, w) - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} =$$

$$\frac{1}{h}(p|_{z=w-h/2} - p|_{z=w+h/2}), \quad (1)$$

$$\frac{1}{E}\Delta^2\Phi + \frac{1}{2}L(w, w) = \frac{1}{E}\tilde{\sigma}_y'' \quad (2)$$

其中,  $t$  为时间变量,  $w = w(x, y, t)$  为薄板受迫振动的挠度函数(横向位移),  $\Phi = \Phi(x, y, t)$  为薄板的薄膜应力势函数,  $p = p(x, y, z, t)$  为板形仪附近空气的压力函数,  $\tilde{\sigma}_y = \tilde{\sigma}_y(x)$  为薄板残余应力张量的轧制方向正应力分量<sup>[5]</sup>,  $\tilde{\sigma}_y''$  为其对坐标  $x$  的二阶导数,  $\rho_s$  为薄板的密度,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  为薄板的弯曲刚度,  $E$  为薄板弹性模量,  $\nu$  为薄板 Poisson 比,  $h$  为薄板厚度,  $T_0$  为张力辊对薄板施加的张应力. 另一方面, 用以描述板形仪附近空气低速运动的不可压缩流体控制方程组<sup>[19]</sup> 为

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}(\nabla \mathbf{u}) = -g\mathbf{k} - \frac{1}{\rho_a} \left[ \nabla p - \mu \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{u} \right]. \quad (4)$$

其中,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$  为板形仪附近空气的速度矢量函数,  $g$  为重力加速度,  $\rho_a$  为空气密度,  $\mu$  为空气的动力学黏性系数.

然后分别给出薄板变形与板形仪附近空气运动应满足的边界条件. 对边简支对边自由薄板应满足的边界条件为

$$\left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0, b} = 0, \quad (5)$$

$$\left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=0, b} = 0. \quad (5)$$

$$w|_{y=0, l} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0, l} = 0. \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \Big|_{x=0, b} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, b} = 0. \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \Big|_{y=0, l} = \tilde{\sigma}_y + T_0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0, l} = 0. \quad (8)$$

板形仪附近空气应满足的边界条件为

$$p|_{x=-d, b+d} = p_0, \quad (9)$$

$$p|_{y=0, l} = p_0, \quad (10)$$

$$\mathbf{u}|_{z=-H-h/2} = u_0 H(y-L) H(L+a-y) (\sin \omega t - 1) \mathbf{k}. \quad (11)$$

其中,  $u_0$  和  $\omega$  分别为气泵进风口处空气速度大小周期性变化的幅度和圆频率,  $H(x)$  为 Heaviside 函数.

最后给出薄板与板形仪附近空气间的连接条件. 考虑到速度场在薄板底面的连续性<sup>[19]</sup>, 薄板与流体间应有连接条件

$$\mathbf{u}|_{z=w-h/2} = \frac{\partial w}{\partial t} \mathbf{k}. \quad (12)$$

至此, 描述 SI-FLAT 板形仪检测机理的基本偏微分方程组及相应边界条件(1) ~ (12) 已经建立, 进一步对

其进行简化并将时间变量分离出来以形成只含有坐标变量的边值问题.

由于薄板处于微幅低频振动状态, 且薄板上侧空气压强接近大气压强  $p_0$ <sup>[11-12]</sup>, 故可将(1)和(12)两式分别近似为

$$\rho_s \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{D}{h} \Delta^2 w - L(\Phi, w) - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{h}(p|_{z=-h/2} - p_0), \quad (13)$$

$$\mathbf{u}|_{z=-h/2} = \frac{\partial w}{\partial t} \mathbf{k}. \quad (14)$$

由边界条件(11), 设板形仪附近空气运动的速度矢量函数具有如下形式

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}^*(x, y, z) + \mathbf{U}(x, y, z) \sin \omega t. \quad (15)$$

由式(4)和(15), 板形仪附近空气压力函数应具有如下形式

$$p = p_0 + P(x, y, z) \cos \omega t + P^*(x, y, z) \cos^2 \omega t. \quad (16)$$

由(14)和(15)两式, 薄板挠度函数应具有如下形式

$$w = W^*(x, y) + W(x, y) \cos \omega t. \quad (17)$$

由(2)和(17)两式, 薄板应力函数应具有如下形式

$$\Phi = \psi(x, y) + \psi^*(x, y) \cos \omega t + \psi^{**}(x, y) \cos^2 \omega t. \quad (18)$$

将式(15) ~ (18)代入式(2) ~ (4)与式(13), 并将与时间变量  $t$  有关的部分分离后可得

$$\nabla \mathbf{U}^* = 0, \quad (19)$$

$$\nabla \mathbf{U} = 0. \quad (20)$$

$$\rho_a [\mathbf{U}^*(\nabla \mathbf{U}^*) + \mathbf{U}(\nabla \mathbf{U})] = -\rho_a g \mathbf{k} + \mu \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{U}^*. \quad (21)$$

$$\omega \rho_a \mathbf{U} = -\nabla P. \quad (22)$$

$$\rho_a [\mathbf{U}(\nabla \mathbf{U}^*) + \mathbf{U}^*(\nabla \mathbf{U})] = \mu \left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{U}. \quad (23)$$

$$\rho_a \mathbf{U}(\nabla \mathbf{U}) = \nabla P^*. \quad (24)$$

$$\Delta^2 \psi = \tilde{\sigma}_y''(x) - \frac{E}{2} L(W, W^*). \quad (25)$$

$$\Delta^2 \psi^* = -EL(W, W^*), \quad (26)$$

$$\Delta^2 \psi^{**} = -\frac{E}{2} L(W, W). \quad (27)$$

$$\frac{D}{h} \Delta^2 W^* - T_0 \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} - L(\psi, W^*) = 0. \quad (28)$$

$$\omega^2 \rho_s W - \frac{D}{h} \Delta^2 W + T_0 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + L(\psi, W) + L(\psi^*, W^*) + \frac{1}{h} P|_{z=-h/2} = 0. \quad (29)$$

$$L(\psi^*, W) + L(\psi^{**}, W^*) + \frac{1}{h} P^*|_{z=-h/2} = 0. \quad (30)$$

$$L(\psi^{**}, W) = 0. \quad (31)$$

边界条件式(5) ~ (8)化为

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0, b} = 0, \quad \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=0, b} = 0. \quad (32)$$

$$\left( \frac{\partial^2 W^*}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0, b} = 0, \quad \left[ \frac{\partial^3 W^*}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W^*}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=0, b} = 0. \quad (33)$$

$$W|_{y=0, l} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=0, l} = 0. \quad (34)$$

$$W^*|_{y=0, l} = 0, \quad \frac{\partial^2 W^*}{\partial y^2} \Big|_{y=0, l} = 0. \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{x=0, b} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, b} = 0. \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} \Big|_{x=0, b} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, b} = 0. \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{**}}{\partial y^2} \Big|_{x=0, b} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^{**}}{\partial x \partial y} \Big|_{x=0, b} = 0. \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{y=0, l} = \tilde{\sigma}_y + T_0, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0, l} = 0. \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \Big|_{y=0, l} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0, l} = 0. \quad (40)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^{**}}{\partial x^2} \Big|_{y=0, l} = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi^{**}}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0, l} = 0. \quad (41)$$

边界条件式(9) ~ (11) 化为

$$P|_{x=-d, b+d} = 0. \quad (42)$$

$$P^*|_{x=-d, b+d} = 0. \quad (43)$$

$$P|_{y=0, l} = 0. \quad (44)$$

$$P^*|_{y=0, l} = 0. \quad (45)$$

$$U^*|_{z=-H-h/2} = -u_0 H(y-L) H(L+a-y) k. \quad (46)$$

$$U|_{z=-H-h/2} = u_0 H(y-L) H(L+a-y) k. \quad (47)$$

简化的连接条件(14) 式化为

$$U^*|_{z=-h/2} = 0. \quad (48)$$

$$U|_{z=-h/2} = -\omega W k. \quad (49)$$

其中, (25) 和(28) 两式代表的控制方程组与式(33)、(35)、(36) 和(39) 这些边界条件构成了关于  $W^*$  与  $\psi$  的带有残余应力与张应力的薄板屈曲问题, 由于张应力足够大使得带钢不发生在线屈曲, 故有

$$W^* \equiv 0. \quad (50)$$

$$\Delta^2 \psi = \tilde{\sigma}_y'' \quad (51)$$

另一方面, 由式(19) ~ (31) 以及式(50), 与残余应力分布直接有关的物理量仅为  $U$ 、 $P$ 、 $W$  与  $\psi$ , 故只需考虑控制方程(20)、(22) 和(29), 边界条件(32)、(34)、(36)、(42)、(44) 和(47) 以及连接条件(49) 即可. 考虑到(20) 式, 可将未知函数  $U$  消去, 故式(22)、(47) 与(49) 分别化为

$$\left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P = 0. \quad (52)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-H-h/2} = -u_0 \omega \rho_a H(y-L) H(L+a-y). \quad (53)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = \omega^2 \rho_a W. \quad (54)$$

另一方面, 由(36)、(39) 与(51) 三式可得

$$\psi = \psi(x), \quad (55)$$

$$\psi'' = \tilde{\sigma}_y + T_0. \quad (56)$$

考虑到式(50), 将式(56) 代入式(29) 消去  $\psi$  而得到只含有  $W$  与  $P$  的式(57), 并与仅含  $P$  的控制方程式(52)、边界条件式(32)、(34)、(42)、(44) 和(53) 以及连接条件式(54) 构成描述处于稳定工作状态时 SI-FLAT 板形仪检测原理的流固耦合振动边值问题

$$\frac{D}{h} \Delta^2 W - (\tilde{\sigma}_y + T_0) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \omega^2 \rho_s W - \frac{1}{h} P|_{z=-h/2} = 0, \quad (57)$$

$$\left( \Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) P = 0,$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0, b} = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=0, b} = 0,$$

$$W|_{y=0, l} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \Big|_{y=0, l} = 0,$$

$$P|_{x=-d, b+d} = 0,$$

$$P|_{y=0, l} = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-H-h/2} = -u_0 \omega \rho_a H(y-L) H(L+a-y),$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z=-h/2} = \omega^2 \rho_a W.$$

其中,  $W$  与  $P$  之间的双向耦合特性体现在控制方程式(57) 与连接条件式(54) 中. 由于  $W^* \equiv 0$ , 由式(17) 可以看出  $W$  即代表薄板的振幅, 故上述边值问题涉及到三个物理量: 薄板的振幅  $W$ 、板形仪附近空气压力函数以角频率  $\omega$  周期性波动的幅值  $P$  和薄板的残余应力分布  $\tilde{\sigma}_y$ . SI-FLAT 板形仪检测机理的核心即为  $W$  与  $\tilde{\sigma}_y$  间的关系, 求解该边值问题的过程中应设法将  $P$  消去.

## 2.2 流固耦合振动边值问题的求解

现采用分离变量法求解流固耦合振动边值问题. 首先需要找到满足边界条件(32) 和(34) 的本征函数族  $W_{mn}(x, y)$ ,  $m=0, 1, 2, 3, \dots$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ , 为此需求解对边简支对边自由薄板(无残余应力与张应力) 的自由振动问题

$$\frac{D}{h} \Delta^2 W_{mn} - \omega^2 \rho_s W_{mn} = 0. \quad (58)$$

$$\left( \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \right) \Big|_{x=0, b} = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial^3 W_{mn}}{\partial x^3} + (2-v) \frac{\partial^3 W_{mn}}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x=0, b} = 0. \quad (59)$$

$$W_{mn} \Big|_{y=0, l} = 0, \quad \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \Big|_{y=0, l} = 0. \quad (60)$$

其中,  $\omega_{mn}$  为边值问题 (58) ~ (60) 的本征值, 也即自由振动的固有频率. 该本征值问题的解为

$$W_{mn}(x, y) = f_{mn}(x) \sin \frac{n\pi y}{l}, \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots), (n=1, 2, 3, \dots). \quad (61)$$

其中, 当  $m=0$  时

$$f_{0n}(x) = \frac{K_{0n} \sinh \beta_{0n} b - J_{0n} \sinh \alpha_{0n} b}{\cosh \beta_{0n} b - \cosh \alpha_{0n} b} \cosh \alpha_{0n} x - J_{0n} \sinh \alpha_{0n} x + \frac{J_{0n} \sinh \alpha_{0n} b - K_{0n} \sinh \beta_{0n} b}{K_{0n} (\cosh \beta_{0n} b - \cosh \alpha_{0n} b)} \cosh \beta_{0n} x + \sinh \beta_{0n} x, \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\alpha_{0n} = \sqrt{n^2 \pi^2 / l^2 + \omega_{0n} \sqrt{\rho_s h / D}},$$

$$\beta_{0n} = \sqrt{n^2 \pi^2 / l^2 - \omega_{0n} \sqrt{\rho_s h / D}},$$

$$K_{0n} = \frac{(1-v) n^2 \pi^2 / l^2 - \omega_{0n} \sqrt{\rho_s h / D}}{(1-v) n^2 \pi^2 / l^2 + \omega_{0n} \sqrt{\rho_s h / D}},$$

$$J_{0n} = \frac{\beta_{0n}}{K_{0n} \alpha_{0n}}.$$

本征值  $\omega_{0n}$  由如下方程确定

$$(J_{0n}^2 + K_{0n}^2) \sinh \alpha_{0n} b \sinh \beta_{0n} b + 2J_{0n} K_{0n} (1 - \cosh \alpha_{0n} b \cosh \beta_{0n} b) = 0.$$

当  $m=1, 2, 3, \dots$  时

$$f_{mn}(x) = \frac{K_{mn} \sin \beta_{mn} b - J_{mn} \sinh a_{mn} b}{\cosh a_{mn} b - \cos \beta_{mn} b} \cosh a_{mn} x + J_{mn} \sinh a_{mn} x + \frac{K_{mn} \sin \beta_{mn} b - J_{mn} \sinh a_{mn} b}{K_{mn} (\cosh a_{mn} b - \cos \beta_{mn} b)} \cos \beta_{mn} x + \sin \beta_{mn} x, \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$\alpha_{mn} = \sqrt{\omega_{mn} \sqrt{\rho_s h / D} + n^2 \pi^2 / l^2},$$

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega_{mn} \sqrt{\rho_s h / D} - n^2 \pi^2 / l^2},$$

$$K_{mn} = \frac{\omega_{mn} \sqrt{\rho_s h / D} - (1-v) n^2 \pi^2 / l^2}{\omega_{mn} \sqrt{\rho_s h / D} + (1-v) n^2 \pi^2 / l^2},$$

$$J_{mn} = \frac{\beta_{mn}}{K_{mn} \alpha_{mn}}.$$

本征值  $\omega_{mn}$  由如下方程确定

$$(K_{mn}^2 - J_{mn}^2) \sinh \alpha_{mn} b \sin \beta_{mn} b + 2K_{mn} J_{mn} (1 - \cosh \alpha_{mn} b \cos \beta_{mn} b) = 0.$$

进而可将薄板振幅  $W$  展开为

$$W = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn} W_{mn}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \theta_{mn} f_{mn}(x) \sin \frac{n\pi y}{l}, \quad (62)$$

其中,  $\theta_{mn}$  为待定系数, 这种形式的  $W$  自动满足边界条件 (32) 和 (34). 另一方面, 调和函数  $P$  解的形式为

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi(x+d)}{b+2d} \sin \frac{s\pi y}{l} (C_{ks} \cosh \lambda_{ks} z + D_{ks} \sinh \lambda_{ks} z), \quad (63)$$

其中,  $C_{ks}$  和  $D_{ks}$  为待定系数,  $\lambda_{ks} = \pi \sqrt{(k/b+2d)^2 + (s/l)^2}$ , 这种形式的  $P$  自动满足控制方程 (52) 以及边界条件 (42) 和 (44). 故将 (62) 和 (63) 两式代入控制方程 (57) 以及边界条件 (53) 和 (54) 分别得到

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn} \left\{ (\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rho_s + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} [\tilde{\sigma}_y(x) + T_0] \right\} f_{mn}(x) \sin \frac{n\pi y}{l} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi(x+d)}{b+2d} \sin \frac{s\pi y}{l} \left( C_{ks} \cosh \frac{\lambda_{ks} h}{2} - D_{ks} \sinh \frac{\lambda_{ks} h}{2} \right), \quad (0 < x < b). \quad (64)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{ks} \sin \frac{k\pi(x+d)}{b+2d} \sin \frac{s\pi y}{l} \left( D_{ks} \cosh \frac{\lambda_{ks} h}{2} - C_{ks} \sinh \frac{\lambda_{ks} h}{2} \right) = \omega^2 \rho_a \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{mn} f_{mn}(x) \sin \frac{n\pi y}{l}, \quad (0 < x < b). \quad (65)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{ks} \sin \frac{k\pi(x+d)}{b+2d} \sin \frac{s\pi y}{l} \left[ D_{ks} \cosh \lambda_{ks} \left( H + \frac{h}{2} \right) - C_{ks} \sinh \lambda_{ks} \left( H + \frac{h}{2} \right) \right] = -u_0 \omega \rho_a H(y-L) H(L+a-y), \quad (-d < x < b+d). \quad (66)$$

利用三角函数族的正交性

$$\int_0^l \sin \frac{n\pi y}{l} \sin \frac{\hat{n}\pi y}{l} dy = 0, \quad (n \neq \hat{n}),$$

$$\int_{-d}^{b+d} \sin \frac{k\pi(x+d)}{b+2d} \sin \frac{\hat{k}\pi(x+d)}{b+2d} dx = 0, \quad (k \neq \hat{k}).$$

可将式 (64) ~ (66) 化简为

$$\sum_{m=0}^{\infty} \theta_{mn} \left\{ (\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rho_s + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} [\tilde{\sigma}_y(x) + T_0] \right\} f_{mn}(x) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left( C_{kn} \cosh \frac{\lambda_{kn} h}{2} - D_{kn} \sinh \frac{\lambda_{kn} h}{2} \right) \sin \frac{k\pi(x+d)}{b+2d}, \quad (0 < x < b). \quad (67)$$

$$\omega^2 \rho_a \sum_{m=0}^{\infty} \theta_{mn} f_{mn}(x) =$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_{kn} \left( D_{kn} \cosh \frac{\lambda_{kn} h}{2} - C_{kn} \sinh \frac{\lambda_{kn} h}{2} \right) \sin \frac{k\pi(x+d)}{b+2d}, \quad (0 < x < b). \quad (68)$$

$$- \frac{8u_0 \omega \rho_a}{kn \lambda_{kn} \pi^2} [1 - (-1)^k] \sin \frac{n\pi(2L+a)}{2l} \sin \frac{n\pi a}{2l} =$$

$$D_{kn} \cosh \lambda_{kn} \left( H + \frac{h}{2} \right) - C_{kn} \sinh \lambda_{kn} \left( H + \frac{h}{2} \right). \quad (69)$$

利用式(69)消去(67)和(68)式中的  $D_{ks}$ , 并考虑到函数族  $f_{mn}(x)$  关于指标  $m$  的正交性<sup>[20]</sup>

$$\int_0^b f_{mn}(x) f_{m\tilde{n}}(x) dx = 0, (m \neq \tilde{m}),$$

得到含有  $\theta_{rn}$  和  $C_{kn}$  (等同于上述待定系数  $\theta_{mn}$  和  $C_{ks}$ , 改写指标以做区别) 的无穷维线性代数方程组

$$\begin{aligned} & \frac{n^2 \pi^2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rho_s l^2} \sum_{r=0}^{\infty} \tau_{mrn} \theta_{rn} + \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\lambda_{kn} \sinh \lambda_{kn} H}{\omega^2 \rho_a} - \frac{\cosh \lambda_{kn} H}{h(\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rho_s} \right] \frac{\gamma_{mnk} C_{kn}}{\cosh \lambda_{kn} (H + h/2)} = \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\lambda_{kn} \cosh \lambda_{kn} h/2}{\omega^2 \rho_a} + \frac{\sinh \lambda_{kn} h/2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rho_s h} \right] \frac{8u_0 \omega \rho_a}{kn \lambda_{kn} \pi^2} \cdot \\ & \frac{\gamma_{mnk} [1 - (-1)^k]}{\cosh \lambda_{kn} (H + h/2)} \sin \frac{n\pi(2L+a)}{2l} \sin \frac{n\pi a}{2l}. \quad (70) \\ \varphi_{mn} \sum_{r=0}^{\infty} \delta_{mr} \theta_{rn} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} \sinh \lambda_{kn} H}{\omega^2 \rho_a} \frac{\gamma_{mnk} C_{kn}}{\cosh \lambda_{kn} (H + h/2)} = \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} \cosh \lambda_{kn} h/2}{\omega^2 \rho_a} \frac{8u_0 \omega \rho_a}{kn \lambda_{kn} \pi^2} \frac{\gamma_{mnk} [1 - (-1)^k]}{\cosh \lambda_{kn} (H + h/2)} \cdot \\ & \sin \frac{n\pi(2L+a)}{2l} \sin \frac{n\pi a}{2l}. \quad (71) \end{aligned}$$

其中,  $\tau_{mrn}$ 、 $\gamma_{mnk}$ 、 $\varphi_{mn}$  和  $\delta_{mr}$  分别定义为

$$\begin{aligned} \tau_{mrn} &= \int_0^b [\tilde{\sigma}_y(x) + T_0] f_{mn}(x) f_{rn}(x) dx, \quad (72) \\ \gamma_{mnk} &= \int_0^b \sin \frac{k\pi(x+d)}{b+2d} f_{mn}(x) dx, \\ \varphi_{mn} &= \int_0^b f_{mn}^2(x) dx, \quad \delta_{mr} = \begin{cases} 1, & (m=r) \\ 0, & (m \neq r) \end{cases} \end{aligned}$$

若已知残余应力分布  $\tilde{\sigma}_y$ , 则  $\tau_{mrn}$  确定, 此时(70)和(71)两式可看作关于  $\theta_{rn}$  和  $C_{kn}$  的无穷维线性代数方程组, 对其求解后再由式(62)可进一步得到带钢振幅  $W$ , 这样就建立了 SI-FLAT 板形仪已知残余应力分布得到带钢振幅的数学关系, 得到残余应力-振幅模型; 另一方面, 若已知带钢振幅分布  $W$ , 则可将其按式(62)分解而得到  $\theta_{rn}$ , 此时(70)和(71)两式可看作关于  $\tau_{mrn}$  和  $C_{kn}$  的无穷维线性代数方程组, 对其求解后再由式(72)通过级数展开法可进一步得到残余应力分布  $\tilde{\sigma}_y$ , 这样就建立了 SI-FLAT 板形仪已知带钢振幅得到残余应力分布的数学关系, 得到振幅-残余应力模型. 至此, 基于流固耦合振动分析的 SI-FLAT 板形仪检测原理数学模型完成, 需进一步通过实测数据检验其准确性.

### 3 数学模型可靠性的验证与带钢振幅影响因素的分析

#### 3.1 基于流固耦合振动分析的振幅-残余应力模型验证

某钢厂冷连轧机末机架出口处设置有 SI-FLAT 板形仪用以检测冷轧带钢的残余应力分布, 在该厂计

算机中心可读取到整块带钢的残余应力分布数据以及基础目标曲线数据<sup>[3,5]</sup>, 而无法读取到带钢受迫振动产生的位移(振幅)数据. 为此, 可以根据 Siemens 公司提出的振幅-残余应力模型<sup>[3-4]</sup>反推最大振幅分布(振幅在轧制方向的最大值), 进而与本文提出的模型在已知残余应力情形下计算得到的最大振幅进行对比, 若两者趋势相符则验证了基于流固耦合振动分析的振幅-残余应力模型的合理性. 用于验证模型的某卷带钢具有宽度 1635 mm、厚度 0.7 mm 的尺寸规格, 宽度方向上的 80 个涡流位移传感器检测得到其气动载荷下一个振动周期内不同时刻的位移<sup>[6]</sup>, 然后通过时间的 Fourier 变换得到最大振幅, 最后利用 Siemens 振幅-残余应力模型经目标曲线修正而得到如图 3 所示残余应力轧制方向正应力  $\tilde{\sigma}_y(x_i)$  实测值, 其中  $x_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, 80$ ) 代表 80 个检测点的坐标.

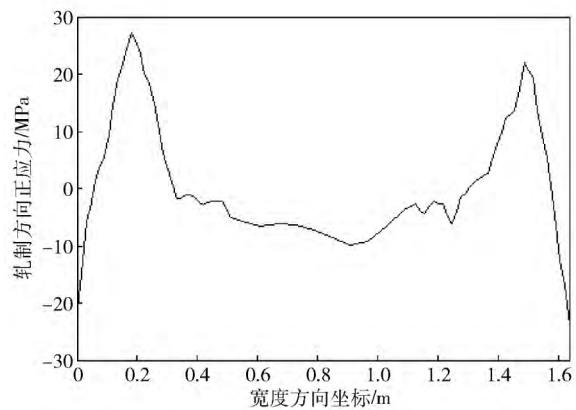


图 3 残余应力轧制方向正应力  $\tilde{\sigma}_y(x_i)$  实测值

Fig. 3 Measured residual stress component in rolling direction  $\tilde{\sigma}_y(x_i)$

现由图 3 所示残余应力值反推最大振幅, 首先剔除基础目标曲线值  $\tilde{\sigma}_{sp}(x_i)$  的修正效果<sup>[5]</sup>, 得到未经修正的残余应力值  $\tilde{\sigma}(x_i)$  (如图 4 所示), 即

$$\tilde{\sigma}(x_i) = \tilde{\sigma}_y(x_i) + \tilde{\sigma}_{sp}(x_i). \quad (73)$$

然后利用 Siemens 公司提出的振幅-残余应力模型<sup>[3-4]</sup>反推最大振幅分布  $A(x_i)$

$$A(x_i) = \frac{1}{\kappa} \frac{T_0}{\tilde{\sigma}(x_i) + T_0}. \quad (74)$$

其中,  $\kappa = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{80} \frac{1}{A(x_i)}$  是一个未知常数(单位  $m^{-1}$ , 但是在已知最大振幅而计算残余应力时,  $\kappa$  是可以得到的), 因此带钢最大振幅的具体值无法得知, 但由于张应力与未经修正的残余应力  $\tilde{\sigma}(x_i)$  值是已知的, 故带钢的实测最大振幅分布  $\frac{T_0}{\tilde{\sigma}(x_i) + T_0}$  (量纲一) 可知. 另一方面, 由于要求带钢振幅在 0.15 mm 左右, 为便



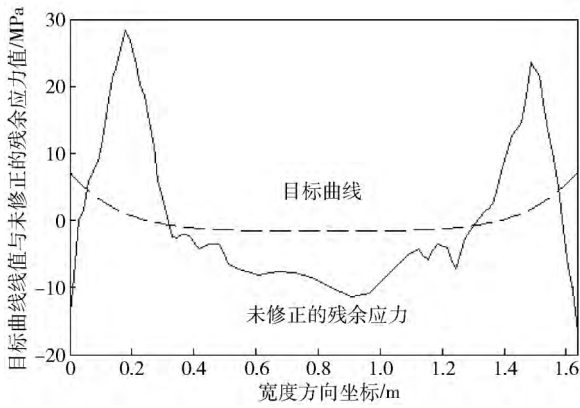


图 4 基础目标曲线值  $\hat{\sigma}_{sp}(x_i)$  与未修正的残余应力值  $\hat{\sigma}(x_i)$

Fig. 4 Basic aim curve  $\hat{\sigma}_{sp}(x_i)$  and residual stress without modification  $\hat{\sigma}(x_i)$

于进一步对比, 将实测最大振幅  $A^*(x_i)$  定义为

$$A^*(x_i) = \frac{T_0}{\hat{\sigma}(x_i) + T_0} \times 10^{-4} \text{ m.} \quad (75)$$

$A^*(x_i)$  在数值上相当于带钢实际最大振幅乘以某一常数, 两者曲线形式是完全一致的.

将表 1 和表 2 所示尺寸、材料与力学参数<sup>[3,5]</sup>代入第 2 节建立的数学模型, 在已知如图 3 所示残余应力的情形下计算带钢振幅, 本质上归结于求解关于  $\theta_{mn}$  的无穷维线性代数方程组. 经编程计算, 本算例在  $m = 11, n = 6$  时即收敛.

表 1 尺寸参数

Table 1 Dimension parameters

参数/mm	数值
$b$	1635
$l$	1000
$h$	0.7
$H$	5.0
$d$	217.5
$L$	326.5
$a$	17

表 2 材料与力学参数

Table 2 Parameters of materials and mechanics

参数	数值
$\rho_s / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	7850
$E / \text{GPa}$	210
$\nu$	0.3
$T_0 / \text{MPa}$	30
$\rho_a / (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	1.185
$u_0 / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	0.9
$\omega / (\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$	$10\pi$

$$\max_{i,j} \left| \sum_{m=0}^{12} \sum_{n=1}^6 \theta_{mn} W_{mn}(x_i, y_j) - \sum_{m=0}^{11} \sum_{n=1}^6 \theta_{mn} W_{mn}(x_i, y_j) \right| < 5 \times 10^{-7} \text{ m.} \quad (76)$$

$$\max_{i,j} \left| \sum_{m=0}^{11} \sum_{n=1}^7 \theta_{mn} W_{mn}(x_i, y_j) - \sum_{m=0}^{11} \sum_{n=1}^6 \theta_{mn} W_{mn}(x_i, y_j) \right| < 5 \times 10^{-7} \text{ m.} \quad (77)$$

其中,  $\max_{i,j}$  代表遍历指标  $i$  和  $j$  求最大值,  $y_j$  为离散化的轧制方向坐标. 计算得到的部分  $\theta_{mn}$  值如表 3 所示.

表 3 部分  $\theta_{mn}$  值

Table 3 Partial values of  $\theta_{mn}$

$m$	$n$		$\mu\text{m}$
	1	2	
0	-33.16	-3.452	
1	0.8980	0.08182	
2	10.92	0.02153	
3	-0.1358	0.02274	
4	-18.54	-1.115	
5	0.9871	0.1045	
6	-17.00	-1.509	

检测区域内带钢的振幅  $W(x_i, y_j)$  如图 5 所示.

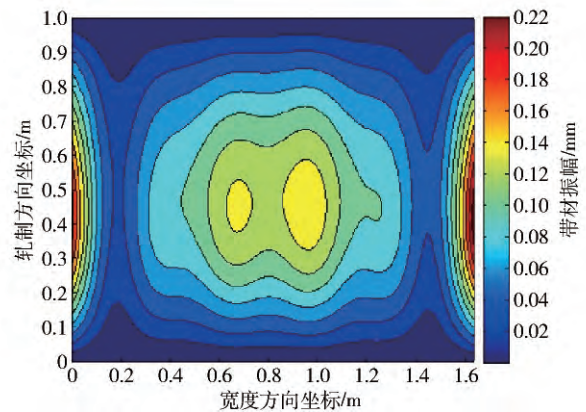


图 5 检测区域内带钢振幅云图

Fig. 5 Nephogram of strip's amplitude in detection area

计算所得最大振幅  $\max_j [W(x_i, y_j)]$  与式(75)定义的实测最大振幅的对比如图 6 所示, 其中,  $\max_j$  代表仅遍历指标  $j$  求最大值. 可见二者形式吻合良好, SI-FLAT 板形仪基于流固耦合振动分析的振幅-残余应力模型的可靠性得到了验证.

根据以上分析, 可以得出基于薄板流固耦合振动理论的 SI-FLAT 板形仪振幅-残余应力模型相对于 Siemens 公司提出的基于带张力梁振动理论的 SI-FLAT 板形仪振幅-残余应力模型具有以下优势: 综合考虑了薄板变形与板形仪周围空气的运动, 克服了



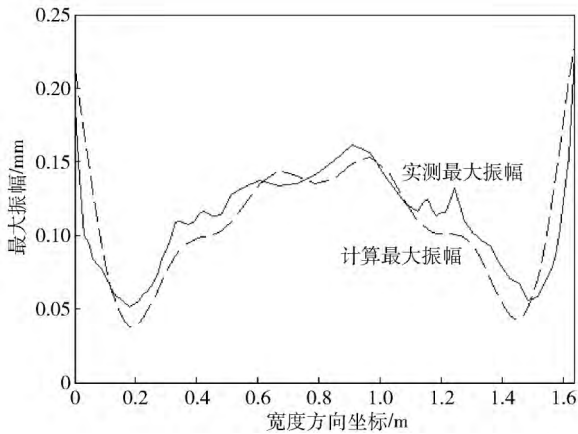


图 6 最大振幅实测值与计算值的对比

Fig. 6 Comparison of measured and calculated maximum amplitudes

Siemens 模型将板离散为梁带来的误差,物理模型与实物更加接近;无需基础目标曲线修正,克服了 Siemens 模型施加在梁上的均布集中载荷带来的误差,模型中涉及各物理意义明确;全面考虑了各种尺寸和材料与力学参数对振幅-残余应力关系的影响,便于指导实际工业应用,尤其是考虑到传感器的检测范围(0.15 mm 左右),该模型可以定量地分析各参数对振幅大小的影响,而 Siemens 模型中由于不涉及表 1 和表 2 中的许多参数(如气泵进风口空气速度、检测距离和激振频率等),因而无法解决实际应用中由于生产设备位置调整和生产产品种类改变所带来的检测准确性问题。

### 3.2 气泵进风口空气速度、检测距离和激振频率对振幅的影响

为保证 SI-FLAT 板形仪涡流传感器检测的准确性,需要使带钢具有 0.15 mm 左右的振幅.在实际应用中,对带钢振幅的调节手段有三种:改变气泵进风口空气速度  $u_0$ 、检测距离  $H$  或激振频率  $\omega$ .由式(74)可以看出, Siemens 公司提出的振幅-残余应力模型无法考虑这些因素对带钢振幅的影响.而第 2 节建立的基于薄板流固耦合振动理论的振幅-残余应力模型包含了这些参数,下面利用该模型分别对这三种调节手段进行分析。

对(70)和(71)两式进行分析,容易发现其方程右端项均含有  $u_0$  因子,故线性方程的解  $\theta_{mn}$  应成正比于  $u_0$ (微幅振动成立的前提条件下),这一点可以通过将(70)和(71)两式写成矩阵形式而明显得出.设

$$\theta = \theta_{rn}, C = C_{kn}, A_1 = \frac{n^2 \pi^2 \tau_{mn}}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rho_s l^2},$$

$$A_2 = \left[ \frac{\lambda_{kn} \sinh \lambda_{kn} H}{\omega^2 \rho_a} - \frac{\cosh \lambda_{kn} H}{h(\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rho_s} \right] \frac{\gamma_{mnk}}{\cosh \lambda_{kn}(H + h/2)},$$

$$R_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{\lambda_{kn} \cosh \lambda_{kn} h/2}{\omega^2 \rho_a} + \frac{\sinh \lambda_{kn} h/2}{(\omega_{mn}^2 - \omega^2) \rho_s h} \right].$$

$$\frac{8\omega \rho_a}{kn \lambda_{kn} \pi^2} \frac{\gamma_{mnk} [1 - (-1)^k]}{\cosh \lambda_{kn}(H + h/2)} \sin \frac{n\pi(2L + a)}{2l} \sin \frac{n\pi a}{2l},$$

$$A_3 = \varphi_{mn} \delta_{mr}, A_4 = \frac{\lambda_{kn} \sinh \lambda_{kn} H}{\omega^2 \rho_a} \frac{\gamma_{mnk}}{\cosh \lambda_{kn}(H + h/2)},$$

$$R_2 = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{kn} \cosh \lambda_{kn} h/2}{\omega^2 \rho_a} \frac{8\omega \rho_a}{kn \lambda_{kn} \pi^2} \cdot$$

$$\frac{\gamma_{mnk} [1 - (-1)^k]}{\cosh \lambda_{kn}(H + h/2)} \sin \frac{n\pi(2L + a)}{2l} \sin \frac{n\pi a}{2l}.$$

则(70)和(71)两式可化为

$$\begin{cases} A_1 \theta + A_2 C = u_0 R_1, \\ A_3 \theta + A_4 C = u_0 R_2. \end{cases} \quad (78)$$

进而有

$$\theta = u_0 (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)^{-1} (R_1 - A_2 A_4^{-1} R_2). \quad (79)$$

因此,改变气泵进风口空气速度大小是一种直接有效的振幅调节手段,且在微幅振动范围内会成比例地改变振幅大小。

由(70)和(71)两式,可以得出检测距离  $H$  以双曲余弦与双曲正弦形式影响带钢振幅大小,可在保持表 1 和表 2 中其他参数不变而只改变  $H$  的情况下进行分析.图 7 所示为最大振幅(遍历指标  $i, j$ )  $\max [W(x_i, y_j)]$  与  $H$  之间的关系。

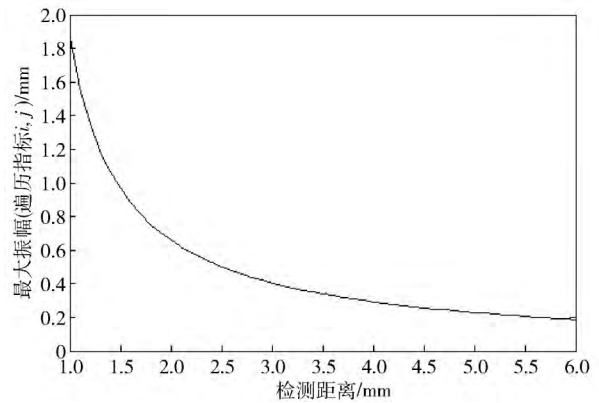


图 7 最大振幅(遍历指标  $i, j$ )与检测距离的关系

Fig. 7 Relationship between maximum amplitude (through indexes  $i, j$ ) and detection distance

可见改变检测距离大小也是一种有效的振幅调节手段,且影响是指数级的。

激振频率  $\omega$  对带钢振幅的影响主要表现在其与带钢在无残余应力与张应力情况下固有频率  $\omega_{mn}$  的接近程度.从式(70)等号右侧可以看出,若激振频率与某一阶固有频率过于接近,则带钢振幅会显著增大而远超过 0.15 mm.表 4 所示为无残余应力与张应力情况下部分阶数的固有频率  $\omega_{mn}$  ( $b, l, h, E, \nu$  和  $\rho_s$  如表 1 和表 2 所示,只有这些参数影响带钢固有频率).检测中经常采用的  $10\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  的激振圆频率(5 Hz 频

率) 介于  $\omega_{21}$  与  $\omega_{31}$  之间, 几乎是二者的平均值, 所以带钢振幅不会过大. 根据本征值理论<sup>[20]</sup>, 更高阶的固有频率随阶数指标  $m$  和  $n$  而单调增大.

表 4 部分  $\omega_{mn}$  值  
Table 4 Partial values of  $\omega_{mn}$  (rad·s<sup>-1</sup>)

m	n	
	1	2
0	10.639	42.874
1	13.725	46.180
2	23.110	56.981
3	39.271	74.685
4	63.144	99.504
5	95.100	131.81
6	135.22	171.93

### 4 结论

(1) 联立带有惯性项和流体压强载荷的非协调 Föppl-von Kármán 方程组以及不可压缩流体方程组, 得到描述板形仪非稳定工作状态的偏微分方程组, 根据带钢残余应力的特点以及流体载荷关于时间变量的形式将各物理量的时间部分分离出来, 结合边界条件以及流固间的连接条件, 形成描述板形仪非稳定工作状态的常微分方程组边值问题, 利用级数展开法将该边值问题的求解转化为线性代数方程组的求解, 最终建立了基于薄板流固耦合振动理论的 SI-FLAT 板形仪振幅-残余应力数学模型.

(2) 结合实测数据, 利用 Siemens 公司提出的基于梁振动理论的 SI-FLAT 板形仪振幅-残余应力模型及其未知机理的基础目标曲线, 间接验证了本模型的准确性, 表明基于薄板流固耦合振动理论的 SI-FLAT 板形仪振幅-残余应力模型具有无需额外修正, 物理意义明确的特点.

(3) 利用基于薄板流固耦合振动理论的振幅-残余应力模型对三种带钢振幅调节手段进行了分析, 克服了 Siemens 模型在这一点上的不足, 对 SI-FLAT 板形仪的实际应用与自主开发具有指导作用.

### 参 考 文 献

[1] Yang G H, Zhang J, Cao J G, et al. Detecting principle and system of contactless flatness measurement for strips. *Metall Ind Autom*, 2009( Suppl 1): 665  
(杨光辉, 张杰, 曹建国, 等. 带钢非接触式平坦度检测原理及其检测系统. 冶金自动化, 2009(增刊 1): 665)

[2] Spreitzhofer G, Duemmler A, Riess M, et al. SI-FLAT contactless flatness measurement for cold rolling mills and processing

lines. *Rev Met Paris*, 2005, 102(9): 589

[3] Huang Q B. *Research on SI-FLAT Flatness Measurement System Technology of Cold Strip Rolling* [Dissertation]. Beijing: University of Science and Technology Beijing, 2013  
(黄桥宝. SI-FLAT 冷轧带钢板形检测技术研究[学位论文]. 北京: 北京科技大学, 2013)

[4] Yang G H, Zhang J, Cao J G, et al. Relationship between strip amplitude and shape for shapometer based on airflow excitation and eddy current. *Trans Beijing Inst Technol*, 2015, 35(7): 671  
(杨光辉, 张杰, 曹建国, 等. 气流激振及涡流测幅式板形仪带钢振幅与板形关系. 北京理工大学学报, 2015, 35(7): 671)

[5] Bao R R. *Characteristic Analysis and Control of Complex Strip Flatness in Ultra-wide Cold Strip Mill* [Dissertation]. Beijing: University of Science and Technology Beijing, 2015  
(包仁人. 超宽冷连轧机带钢复杂板形的特征分析与控制[学位论文]. 北京: 北京科技大学, 2015)

[6] Yang G H, Zhang J, Cao J G, et al. Setting of excitation frequency of SI-FLAT shapometer. *J Tianjin Univ Sci Technol*, 2014, 47(10): 871  
(杨光辉, 张杰, 曹建国, 等. SI-FLAT 板形仪激振频率设定. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2014, 47(10): 871)

[7] Li N, Li H B, Zhang J, et al. Distributed dislocation-residual stress model of cold rolled strips based on the complex variable function method of plane elasticity. *Chin J Eng*, 2016, 38(3): 410  
(李稞, 李洪波, 张杰, 等. 基于平面弹性复变方法的冷轧带钢分布位错-残余应力模型. 工程科学学报, 2016, 38(3): 410)

[8] Cheng C M, Ma Z K. Vibration of cantilever beam placed against water with free surface. *Acta Mech Sin*, 1959, 3(2): 111  
(郑哲敏, 马宗魁. 悬臂梁在一侧受有液体作用时的自由振动. 力学学报, 1959, 3(2): 111)

[9] In K M, Choi D H, Kim M U. Two-dimensional viscous flow past a flat plate. *Fluid Dyn Res*, 1995, 15(1): 13.

[10] Hao Y J. *Mechanical Analysis under Coupled Thin Elastic Plate and Fluid Action* [Dissertation]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2009  
(郝亚娟. 弹性薄板与流体耦合作用的力学分析[学位论文]. 秦皇岛: 燕山大学, 2009)

[11] Hu S L, Lu C J, He Y S. Numerical analysis of fluid-structure interaction vibration for plate. *J Shanghai Jiaotong Univ*, 2013, 47(10): 1487  
(胡世良, 鲁传敬, 何友声. 平板流固耦合振动的数值分析. 上海交通大学学报, 2013, 47(10): 1487)

[12] Lü K, Zhang D, Xie Y H. Fluid-structure interaction for thin plate with different flow parameters. *Proc CSEE*, 2011, 31(26): 76  
(吕坤, 张荻, 谢永慧. 不同来流下薄平板流固耦合特性分析. 中国机电工程学报, 2011, 31(26): 76)

[13] Vaziri A, Hutchinson J W. Metal sandwich plates subject to intense air shocks. *Int J Solids Struct*, 2007, 44(6): 2021

[14] Gao Y Y, Tang G, Wan W. Natural frequencies calculation of a

- quadrate thin plate with welding residual stress. *J Vib Shock*, 2014, 33(9): 165  
(高永毅, 唐果, 万文. 具有焊接残余应力的矩形薄板固有频率计算方法研究. *振动与冲击*, 2014, 33(9): 165)
- [15] Dudarev V V, Mnukhin R M, Vatulyan A O. Vibration of a pre-stressed tube in the presence of plastic zone. *J Sound Vib*, 2016, 375: 92
- [16] Gorb Y, Walton J R. Dependence of the frequency spectrum of small amplitude vibrations superimposed on finite deformations of a nonlinear, cylindrical elastic body on residual stress. *Int J Eng Sci*, 2010, 48(11): 1289
- [17] Jiang H, Wang C Y, Luo Y. Vibration of piezoelectric nano-beams with an internal residual stress and a nonlinear strain. *Phys Lett A*, 2015, 379(40): 2631
- [18] Lewicka M, Mahadevan L, Pakzad M R. The Föppl-von Kármán equations for plates with incompatible strains. *Proc R Soc London A*, 2011, 467(2126): 402
- [19] Wu W Y. *Fluid Mechanics (Volume II)*. Beijing: Peking University Press, 2004  
(吴望一. 流体力学(下册). 北京: 北京大学出版社, 2004)
- [20] Zhang G Q, Lin Y Q. *Handout of Functional Analysis (Volume I)*. Beijing: Peking University Press, 2006  
(张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义(上册). 北京: 北京大学出版社, 2006)